המרכז לחינוך מדעי
תל אביב-יפו

פתח דבר

ספר זה שלפניכם, "מתמטיקה לפיזיקאים" – הוא פרי יוזמה של חברי צוות חמד"ע, המתמודדים כל שנה עם הצורך בהתאמת הידע המתמטי של תלמידי הפיזיקה לדרישות הלימודים.

תודתי העמוקה לגב' קורינה פולינגר מחמד"ע וד"ר איליה מזין, ידיד חמד"ע, שכתבו את הספר.
תודה לסגני, מר משה פרידמן שהיה שותפי ללווי הפרויקט מבחינה תכנית, דידקטית ופדגוגית ולד"ר יוסי קורדובה שלקח חלק בכתיבת פרקים א' ו-ב'. תודות מגיעות לכל אנשי צוות חמד"ע שקראו, העירו הערות והאירו את עיני הכותבים לאורך הדרך, התנסו עם תלמידיהם בכיתה והוסיפו דגשים.

תודה לד"ר דוד סלע, ולמר מיכאל סבין, אנשי הפיקוח של משרד החינוך ולגב' חיה שיטאי שליוו את הספר מתחילתו.

הערכה לאנשי קרן תל אביב: מנכ"ל קרן תל אביב, אלוף (מיל) אברהם בן שושן וד"ר מגי נבון, מנהלת דסק ארה"ב בקרן תל אביב.

תודות לסטנלי צ'ייס ומשפחתו שתרומתם אפשרה את כתיבת הספר והפצתו למורים ותלמידים.

בברכה
ד"ר תהלה בן גיא
מנהלת חמד"ע

המרכז לחינוך מדעי
תל אביב-יפו

הקדמה

מחקרים רבים בהוראת הפיזיקה מוכיחים שהבנת פיזיקה ברמה גבוהה מותנית בשליטה טובה במתמטיקה. מושגים מתמטיים כמו פונקציה, קו ישר, יחס הפוך, משולש, זווית, החלפת משתנים ולינאריזציה, פרופורציה ורבים אחרים חשובים מאד בעיבוד אינפורמציה, בתיאור והבנה של תופעות פיזיקליות.

בין פיזיקה למתמטיקה קיים באופן טבעי קשר סינרגטי, הגורם לכך ששיפור בשליטה באחד גורם לשיפור בשני. יצירת התנאים לשימוש בקשר סינרגטי זה יכולה לגרום אצל לומדי פיזיקה בחטיבה העליונה לשיפור משמעותי בהבנת המושגים, התהליכים הפיזקליים והקשרים ביניהם.

הספר שלפניכם מיועד לתלמידים ולתלמידות הלומדים פיזיקה כמקצוע בחירה לקראת בחינת בגרות בבתי ספר על-יסודיים ברמה של 3 או 5 יח"ל. הוא מהווה את התשובה שלנו לצורך החיוני בחיזוק הבסיס המתמטי ללימודי פיזיקה בחטיבה העליונה.

מטרות הספר:

- לרענן מושגים ונושאים שנלמדו בשנים קודמות בשיעורי המתמטיקה והם רלוונטיים ללימודי הפיזיקה.
- להסביר בקצרה מושגים ונושאים מתמטיים שטרם נלמדו בשיעורי המתמטיקה.
- "לתרגם" את משמעויות המושגים מ"שפת המתמטיקה" ל"שפת הפיזיקה" על מנת ליצור אצל תלמידי הפיזיקה את התובנה, שלמעשה מדובר בשתי ה"שפות" על אותם מושגים.

מבנה הספר מאפשר מעבר מהידע המתמטי ליישומו בלימודי הפיזיקה באמצעות תהליך הדרגתי, מבוקר, ממוקד ושיטתי. אנו בטוחים, שחיזוק הנושאים המתמטיים צריך להתבצע תוך כדי הוראת הפיזיקה; לכן, פרקי הספר מסודרים בהתאם לנושאים המופיעים בתכנית הלימודים בפיזיקה. בכל פרק נכללים שלושה חלקים:

1. הצגת הנושאים המתמטיים הנדרשים.
2. הבהרות והדגשים להתאמת מושגים מ"עולם המתמטיקה" ל"עולם הפיזיקה".
3. אוסף תרגילים ובעיות רלוונטיים לפרק מסודרים לפי דרגת קושי .

בהתאם למטרות ולמבנה הספר, מומלץ להשתמש בו בד בבד עם לימודי הפיזיקה בהתאם לתוכנית הלימודים בכתות ט' - י"א. בכל נושא בלימודי הפיזיקה השימוש בספר זה אמור להתבצע בשני שלבים:

- השלב הראשון הינו תיאורטי ובו מתבצע רענון של נושאים מתמטיים שנלמדו בעבר בשיעורי מתמטיקה והכרת נושאים מתמטיים שטרם נלמדו.
- השלב השני בהפעלת התכנית הינו יישומי ומטרתו להבטיח שהמעבר ממתמטיקה לפיזיקה יופנם ויאפשר בהמשך הבנה מעמיקה של התופעות הפיזיקליות.

במציאות הקיימת בבתי הספר, אפילו באותה קבוצת לימוד, יכולים להימצא תלמידים ברמות ידע מתמטי שונות; ספר זה משתדל לתת מענה לכולם. כל מורה יכול להחליט כיצד ישתמש בו: בצורה פרונטלית , קבוצתית, זוגית או אישית, בזמן השיעורים או במסגרת שיעורי הבית.

אנו מקווים ששימוש בספר זה כחומר עזר בלימודי הפיזיקה בחטיבה העליונה יגרום לשיפור יכולת התמודדות של התלמידים עם הרמה הנדרשת לפי תכנית הלימודים, ישפר את ביטחון העצמי של תלמידי הפיזיקה ויאפשר הפנמה אמיתית של החומר הנלמד.

הערות והארות תתקבלנה בברכה.

קורינה פולינגר, חמד"ע – מרכז לחינוך מדעי של תל אביב-יפו. דוא"ל: corinapo@gmail.com

איליה מזין, מודיעין. דוא"ל: ilya.mazin@gmail.com

תוכן העניינים

פרק א – קינמטיקה של תנועה לאורך קו ישר 9
1. נושאים מתמטיים 9
1.1 המושג "פונקציה" 9
1.2 פונקציה קווית (לינארית) 9
1.3 פונקציה ריבועית 11
1.4 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית 12
1.5 נגזרת של פונקציה 12
1.6 אינטגרל מסוים של פונקציה 13
1.7 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים 14
1.8 שטחים של צורות גיאומטריות 15
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 16
2.1 מפונקציות מתמטיות לפונקציות פיזיקליות 16
2.2 יחידות מדידה והמרתן 19
3. תרגילים 21
תשובות לתרגילים 28

פרק ב – קינמטיקה של תנועה במישור 29
1. נושאים מתמטיים 29
1.1 פרופורציה 29
1.2 גיאומטריה 29
1.3 טריגונומטריה 34
1.4 וקטורים במישור 36
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 43
3. תרגילים 44
תשובות לתרגילים 50

פרק ג – כוחות ומצבי התמדה 51
1. נושאים מתמטיים 51
1.1 שברים רגילים 51

המרכז לחינוך מדעי
תל אביב-יפו

1.2 פונקציה קווית (לינארית).. 52
1.3 מערכת משוואות אלגבריות ממעלה ראשונה 53
1.4 אי-שוויונים.. 53
1.5 גיאומטריה 54
1.6 טריגונומטריה... 54
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 55
3. תרגילים.. 56
תשובות לתרגילים 63

פרק ד – **החוק השני של ניוטון** 64
1. נושאים מתמטיים.. 64
1.1 נפח 64
1.2 אי- שוויונים 65
1.3 וקטורים 66
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 68
3. תרגילים.. 69
תשובות לתרגילים 74

פרק ה – **תנועות במישור** 75
1. נושאים מתמטיים 75
1.1 טריגונומטריה 75
1.2 פירוק, הרכבה וחיסור וקטורים................................. 76
1.3 משולשים דומים 77
1.4 פרבולה 78
1.5 היפרבולה 79
1.6 מעגל 79
1.7 גיאומטריה במרחב 81
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 81
2.1 זריקה אופקית וזריקה משופעת
בהשפעת כוח הכוכב בלבד 81
2.2 תנועה מעגלית 82
3. תרגילים 83
תשובות לתרגילים 90

פרק ו – התנע ושימורו 91
1. נושאים מתמטיים 91
1.1 אינטגרל מסוים של פונקציה 91
1.2 שטחים של צורות גיאומטריות 92
1.3 וקטורים 93
1.4 נגזרת של פונקציה 100
1.5 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים 100
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 101
3. תרגילים 102
תשובות לתרגילים 108

פרק ז – אנרגיה מכנית ושימורה 109
1. נושאים מתמטיים 109
1.1 מכפלה סקלרית של שני וקטורים 109
1.2 אינטגרל מסוים של פונקציה 112
1.3 זווית היקפית הנשענת על קוטר 112
1.4 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית......... 113
1.5 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים 114
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 115
3. תרגילים 116
תשובות לתרגילים 127

פרק ח – מודל הגז האידאלי 128
1. נושאים מתמטיים 128
1.1 פרופורציה 128
1.2 גיאומטריה 128
1.3 חיסור וקטורים 132
1.4 חזקות 133
1.5 כתיב מדעי 134
1.6 ממוצע 134
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 134
3. תרגילים 135
תשובות לתרגילים 137

המרכז לחינוך מדעי
תל אביב-יפו

פרק ט – תנועה הרמונית פשוטה 138

1. נושאים מתמטיים 138
   - 1.1 יחס ישר 138
   - 1.2 יחידות מדידה של זוויות 138
   - 1.3 המעגל הטריגונומטרי 139
   - 1.4 פונקציות טריגונומטריות סינוס וקוסינוס (פונקציות הרמוניות) 140
   - 1.5 זהויות טריגונומטריות 143
   - 1.6 הקירוב עבור זוויות קטנות 143
   - 1.7 משוואות טריגונומטריות 143
   - 1.8 נגזרות של פונקציות סינוס וקוסינוס 144
   - 1.9 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית 144
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 145
3. תרגילים 147

תשובות לתרגילים 154

פרק י – כבידה 155

1. נושאים מתמטיים 155
   - 1.1 אליפסה 155
   - 1.2 מעגל 155
   - 1.3 שברים רגילים 156
   - 1.4 חזקות.. 156
   - 1.5 כתיב מדעי 157
   - 1.6 הפונקציות $y=k/x$ ו- $y=k/x^2$ (k מספר קבוע)................ 158
   - 1.7 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית.......... 159
   - 1.8 אינטגרל מסוים של פונקציה 160
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה 161
3. תרגילים 163

תשובות לתרגילים 169

פרק א - קינמטיקה של תנועה לאורך קו ישר

מושגים מתמטיים – פונקציה, פונקציה קווית וריבועית, לינאריזציה, נגזרת ואינטגרל מסוים של פונקציה, מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, שטחים של צורות גיאומטריות.

קשר לעולם הפיזיקה – פונקציות מקום-זמן ומהירות-זמן בתנועות שוות מהירות ושוות תאוצה הן בייצוג אנליטי והן בייצוג גרפי, משמעות פיזיקלית של הסימנים "+" ו- "-" עבור מיקום, מהירות ותאוצה, משמעות פיזיקלית של נגזרות הפונקציות, של שיפועי המשיקים לגרפים ושל שטחים בין הגרפים לצירי הזמן, מקום יחסי ומהירות יחסית.

1. נושאים מתמטיים

1.1 פונקציה

- פונקציה היא קשר בין שני משתנים: x הנקרא משתנה בלתי תלוי או ארגומנט הפונקציה ו- y הנקרא משתנה תלוי או הפונקציה.
- הפונקציה קובעת לכל ערך של x ערך יחיד של y.
- הסימון המקובל לפונקציה הוא $y=f(x)$.
- ניתן להציג פונקציה בצורה מילולית, בטבלה, בעזרת ביטוי אנליטי או בצורה גרפית.

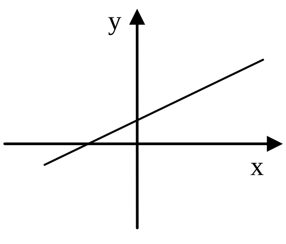
1.2 פונקציה קווית (לינארית)

- תיאור אנליטי – פונקציה ממעלה ראשונה $y = ax + b$ או $y = mx + n$.
- תיאור גרפי – קו ישר במערכת צירים (x,y) מאונכים זה לזה, המכונה מערכת צירים קרטזית.

  a (או m) מתאר את שיפוע הקו הישר = מקדם המשתנה הבלתי תלוי.

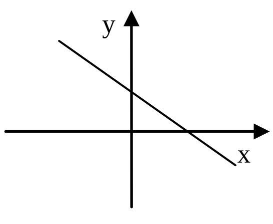
  b (או n) מתאר את נקודת החיתוך עם הציר האנכי = האיבר החופשי של הפונקציה.

  (הערה – במסמך זה נשתמש ב- m ו- n עבור השיפוע ונקודת החיתוך בהתאמה).
- **אם השיפוע חיובי הישר עולה (תרשים 1) ואם הוא שלילי הישר יורד (תרשים 2).**



$m>0$

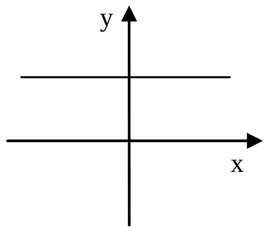
תרשים 1 – ישר עולה



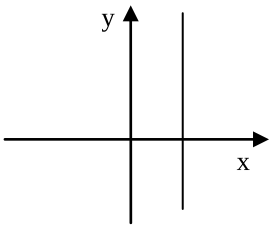
$m<0$

תרשים 2 – ישר יורד

- אם השיפוע אפס, הישר אופקי (מקביל לציר x) , כפי שמוצג בתרשים 3, והוא מתאר פונקציה קבועה.
  הערה: קו ישר אנכי (מקביל לציר y) – תרשים 4 – אינו מתאר פונקציה (לפי ההגדרה).



תרשים 3 – ישר אופקי



תרשים 4 – ישר אנכי

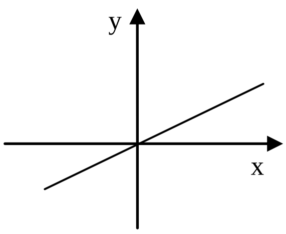
- חישוב שיפועו של הישר העובר דרך שתי נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2):

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

- משוואת הישר העובר דרך שתי נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2):

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

- כאשר האיבר החופשי n מתאפס, הגרף עובר דרך ראשית הצירים - תרשים 5. במקרה כזה אומרים ש- y נמצא <u>ביחס ישר</u> ל- x; למשל, אם x גדל פי N, זה יגרום ל-y לגדול פי N גם כן. חשוב לציין ש<u>יחס ישר הוא מקרה פרטי של תלות לינארית</u>.



תרשים 5 - ישר דרך ראשית הצירים

- יש שוני מהותי בין הטענות:
  - הטענה "Y גדול מ- X <u>פי</u> N" , שפירושה Y=NX,
  - הטענה "Y גדול מ- X <u>ב</u> N" , שפירושה Y=X+N.

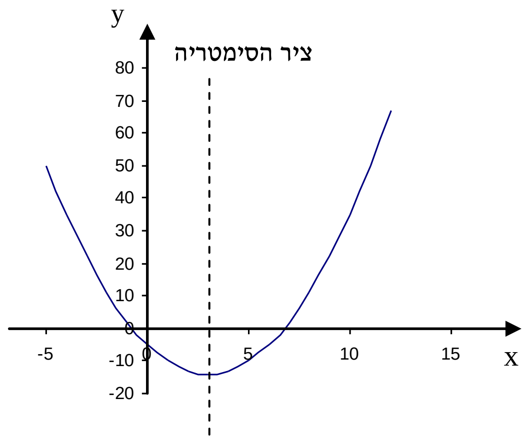
- על מנת לשרטט גרף של פונקציה קווית מספיקות שתי נקודות. אם n=0 נקודה אחת היא ראשית הצירים וזקוקים לעוד נקודה אחת בלבד. אם $n\neq 0$, נוח לשרטט את הגרף בעזרת נקודות החיתוך שלו עם הצירים.

1.3 **פונקציה ריבועית**

- תיאור אנליטי - פונקציה ממעלה שנייה $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.
- תיאור גרפי - פרבולה במערכת צירים קרטזית.
- הפרבולה סימטרית יחסית לישר אנכי העובר דרך קודקודה – ציר הסימטריה. שיעור ה- x של נקודת הקדקוד הוא : $x=-\frac{b}{2a}$
- הקודקוד הוא:

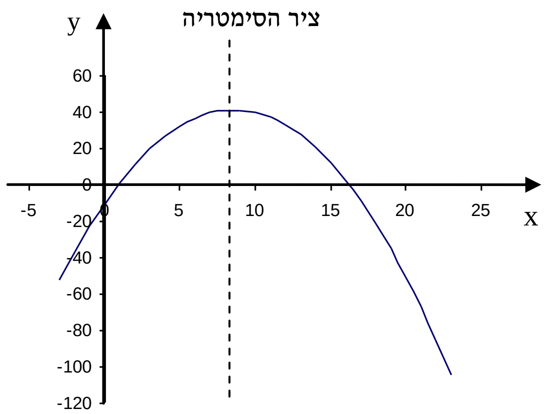
- נקודת <u>מינימום אם a>0</u> (פרבולה קעורה - תרשים 6) ובנקודה זאת הפונקציה עוברת מירידה לעליה.

- נקודת <u>מכסימום אם</u> <u>a<0</u> (פרבולה קמורה - תרשים 7) ובנקודה זאת הפונקציה עוברת מעליה לירידה.



$a>0$

תרשים 6 - פרבולה קעורה



$a<0$

תרשים 7 - פרבולה קמורה

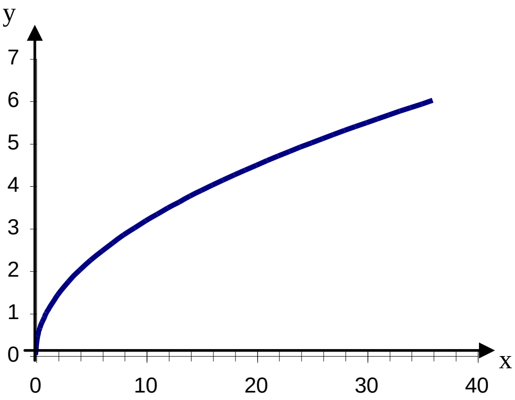
- נקודות החיתוך עם הצירים: ציר y - $y=c$, $x=0$

  ציר x - $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $y=0$

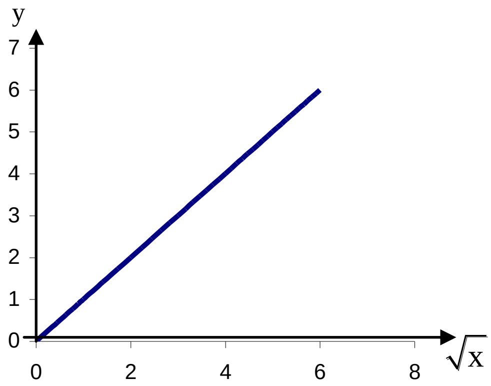
- משיק לקו עקום בנקודה הוא הקו הישר שנוגע בקו העקום רק בנקודה זאת.
- שיפוע של משיק לגרף עקום אינו קבוע, אלא משתנה מנקודה לנקודה.
- מקרה פרטי - המשיק לקו ישר מתלכד עם הקו הישר.

1.4 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית

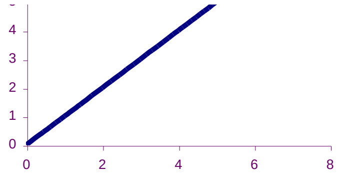
- יישור הוא פעולה שמאפשרת לקבל פונקציה קווית (לינארית) מפונקציה לא קווית. לשם כך יש לבחור במשתנים חדשים במקום המשתנים המקוריים.
- המשתנה החדש מתקבל מהמשתנה הקודם על ידי הפעלה של אחת הפעולות המתמטיות, כמו חזקה או שורש.
- לדוגמה, אם נתונה הפונקציה $y=\sqrt{(x)}$, אשר הגרף שלה איננו ישר (תרשים 8), היישור (כלומר גרף קו ישר) מתקבל בהתאם לתבנית חדשה $y=(\sqrt{x})$ (תרשים 9). בין הסוגריים רשום המשתנה הבלתי תלוי שמשמש לבניית כל גרף.



תרשים 8 - גרף הפונקציה $y=f(x)$
כאשר $f(x)=\sqrt{x}$



תרשים 9 - גרף הפונקציה $y=f(x^*)$
כאשר $x^*=\sqrt{x}$



1.5 נגזרת של פונקציה

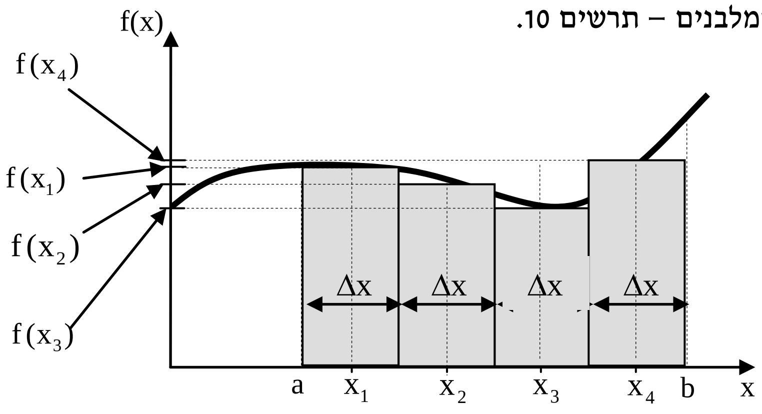
- נגזרת של פונקציה $y=f(x)$ בנקודה x_0 מוגדרת כגבול אליו ש... לבין שינוי הארגומנט כאשר שינוי הארגומנט שואף לאפס.
- נהוג לסמן נגזרת של פונקציה $y=f(x)$ על ידי $y'(x)$ או על ידי $\frac{dy}{dx}$. הצורה השנייה מדגישה שהגזירה נעשית לפי המשתנה x.
- בצורה אנליטית:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}$$

- אם גוזרים פעם נוספת את הפונקציה $y'(x)$, מקבלים נגזרת שנייה $y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$. אם הנגזרת השנייה חיובית עבור x מסוים, באותו x גרף הפונקציה $y(x)$ קעור ואם היא שלילית, אזי הוא קמור.
- הנגזרת משקפת את קצב השתנות הפונקציה.
- המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0.

1.6 אינטגרל מסוים של פונקציה

- בעזרת אינטגרל המסוים אפשר לחשב שטח שבין גרף פונקציה לבין ציר המשתנה הבלתי תלוי.
- החישוב המקורב של השטח יכול להיעשות על ידי חלוקתו למלבנים (כי חישוב שטח מלבן הוא פשוט) וחיבור שטחי כל המלבנים – תרשים 10.



תרשים 10 – קירוב שטח כסכום שטחי מלבנים

- השטח המקורב הוא סכום שטחי המלבנים שנבנו:

$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\cdot\Delta x$$

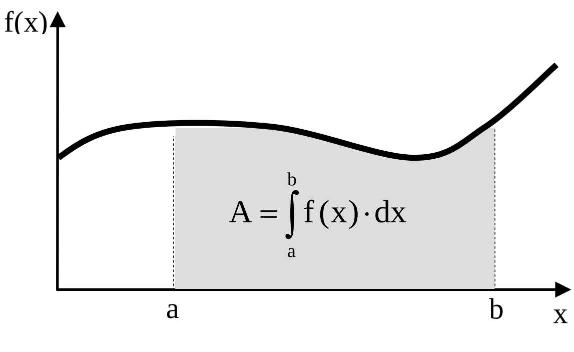
- הקירוב הולך ומשתפר ככל שהרוחב Δx של המלבנים שנבנו הולך וקטן וכך מספר המלבנים הולך וגדל. "הקירוב" האופטימלי (כלומר הקירוב שייתן ערך מדויק של השטח - תרשים 11) מתקבל כאשר רוחב המלבנים שואף לאפס וכתוצאה מכך מספר המלבנים שואף לאינסוף:

$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

בכתיב זה dx מסמן את הרוחב הקטן מאד של כל אחד מהמלבנים, $f(x)$ הוא הגובה של המלבן הנבנה בסביבתו הקרובה מאד של x

והסימן $\int_a^b$ מסמן את האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ מ- $x = a$ עד ל- $x = b$.



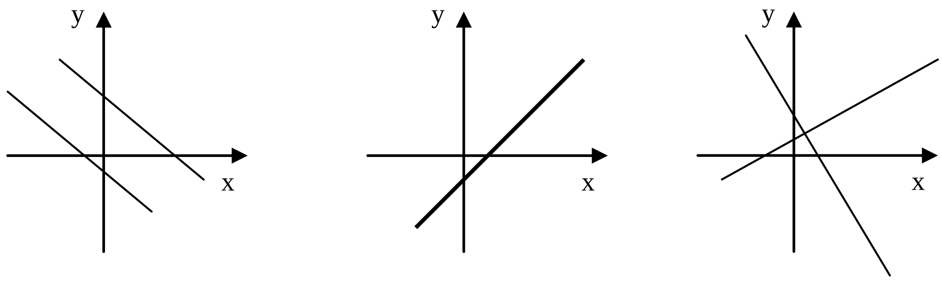
תרשים 11 - השטח המחושב באמצעות אינטגרל מסוים

1.7 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים

- הצורה הכללית של מערכת של שתי משוואות ממעלה ראשונה (משוואות לינאריות) :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

- פתרון המערכת הוא זוג ערכים מספריים עבור שני המשתנים x ו- y . הצבת שני ערכים אלה בכל אחת מהמשוואות הופכת אותה לפסוק אמת.
- כל משוואה מייצגת קו ישר במערכת צירים x,y .
- פתרון המערכת (שיעורי x ו- y) מורכב משיעורי נקודת החיתוך של שני הישרים.
- ישנן שלוש שיטות לפתרון מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים: שיטת ההצבה, שיטת השוואת המקדמים והשיטה הגרפית.
- מספר הפתרונות: פתרון יחיד - ישרים נחתכים , אינסוף פתרונות - ישרים מתלכדים , או אף פתרון - ישרים מקבילים (תרשים 12).

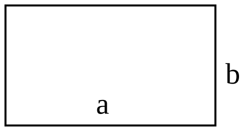


ישרים נחתכים ישרים מתלכדים ישרים מקבילים

תרשים 12

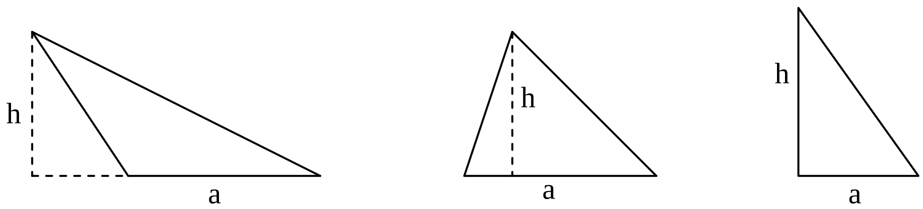
1.8 שטחים של צורות גיאומטריות

- שטח המלבן (תרשים 13): $A = a \cdot b$



תרשים 13 - מלבן

- שטח המשולש (תרשים 14): $A = \dfrac{a \cdot h}{2}$

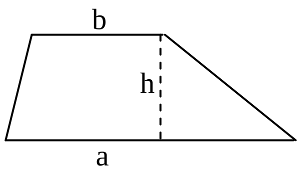


משולש ישר זווית   משולש חד זווית   משולש קהה זווית

תרשים 14 - משולשים

- שטח הטרפז (תרשים 15):

$$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

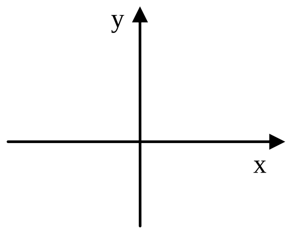
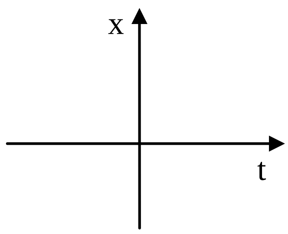
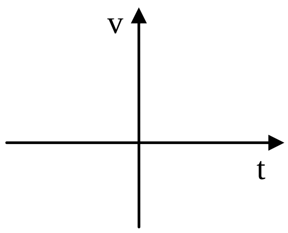
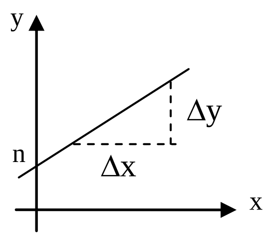
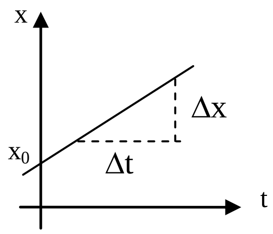
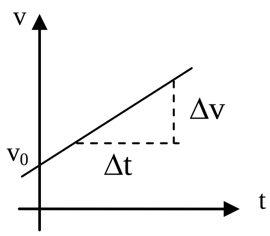


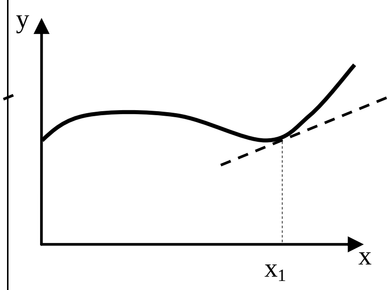
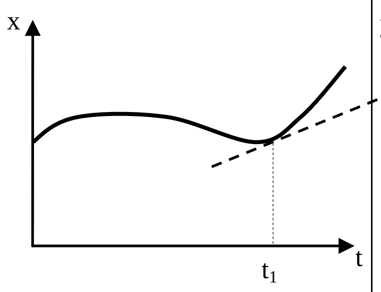
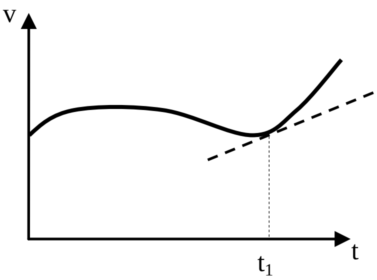
תרשים 15 - טרפז

- יחידת המדידה של שטח היא חזקה 2 של יחידת המדידה של אורך. לדוגמה: m^2 (מ"ר) - היחידה הבסיסית (SI), cm^2 (סמ"ר), km^2 (קמ"ר).

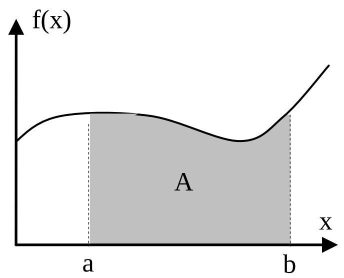
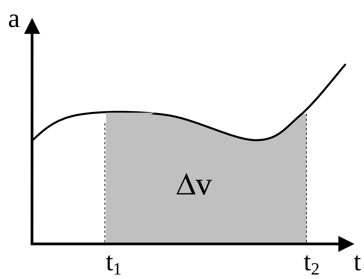
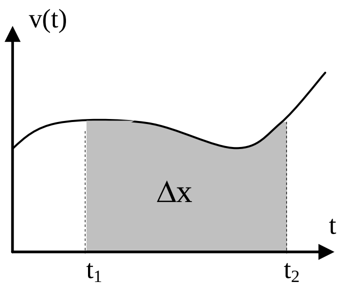
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

2.1 מפונקציות מתמטיות לפונקציות פיזיקליות

מתמטיקה	פיזיקה	
	מקום	מהירות
שיעור (קואורדינטה) x	משתנה בלתי תלוי - זמן t	משתנה בלתי תלוי - זמן t
שיעור (קואורדינטה) y	משתנה תלוי - מקום x	משתנה תלוי - מהירות v
		
פונקציה $y(x)$ או $y = f(x)$	פונקציה מקום- זמן $x(t)$ או $x = x(t)$	פונקציה מהירות- זמן $v(t)$ או $v = v(t)$
פונקציה קווית (לינארית) $y = mx + n$	$x = x_0 + vt$ בתנועה שוות- מהירות	$v = v_0 + at$ בתנועה שוות- תאוצה
 n - נקודת החיתוך עם ציר y השיפוע - $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	 x_0 = המקום ההתחלתי השיפוע = המהירות : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$	 v_0 = המהירות ההתחלתית השיפוע = התאוצה: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
פונקציה ריבועית $y = ax^2 + bx + c$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	

מתמטיקה	פיזיקה	
	מקום	**מהירות**
נגזרת של פונקציה $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (לאו דווקא קבוע)	מהירות = קצב שינוי המקום $v = x'(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ *	תאוצה = קצב שינוי המהירות $a = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
	גרף מקום - זמן 	גרף מהירות - זמן 
שיפוע המשיק לגרף הנקודה x_1 = נגזרת הפונקציה $y(x)$ באותה נקודה	שיפוע המשיק לגרף ברגע t_1 = = המהירות הרגעית ברגע t_1	שיפוע המשיק לגרף ברגע t_1 = = התאוצה הרגעית ברגע t_1
בנקודות הקיצון (מכסימום או מינימום) שיפוע המשיק מתאפס (נגזרת הפונקציה מתאפסת)	בנקודות הקיצון של הפונקציה מקום-זמן המהירות הרגעית מתאפסת	בנקודות הקיצון של הפונקציה מהירות-זמן התאוצה הרגעית מתאפסת
נגזרת הפונקציה = שיפוע המשיק לגרף הפונקציה	נגזרת המקום = קצב רגעי של שינוי המקום = מהירות רגעית	נגזרת המהירות = קצב רגעי של שינוי המהירות = תאוצה רגעית

* בפיזיקה נהוג לפעמים לסמן נגזרת יחסית <u>לזמן</u> על ידי נקודה מעל למשתנה שנגזר.

מתמטיקה	פיזיקה	
	תאוצה כפונקציה של זמן	**מהירות כפונקציה של זמן**
שטח נמדד ביחידות אורך בחזקה 2, למשל m^2 (מ"ר) או cm^2 (סמ"ר)	השטח הכלוא בין הגרף לבין הציר האופקי מייצג גודל פיזיקלי שיחידת המדידה שלו היא מכפלה של יחידות המדידה המתאימות לשני הצירים	
השטח שמתחת לגרף שווה לאינטגרל של הפונקציה בין אותם גבולות	השטח שמתחת לגרף תאוצה-זמן שווה לשינוי במהירות בפרק זמן נתון	השטח שמתחת לגרף מהירות-זמן שווה להעתק (שינוי במקום) הגוף באותו פרק זמן
		
$A=\int_a^b f(x)\cdot dx=\sum_1^{\infty} f(x_i)\Delta x_i$	$\Delta v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)\cdot dt$	$\Delta x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\cdot dt$

הערות:

- לשטח שמתחת לגרף מקום- זמן אין משמעות פיזיקלית.
- בדרך כלל בפיזיקה לא נתון הביטוי של הפונקציה אשר האינטגרל המסויים שלה מייצג גודן פיזיקלי חדש. מה שנתון זהו גרף הפונקציה מסורטט על רקע משובץ. לשם מציאת גודל השטח בתחום הרלוונטי נחוצים שלושה צעדים:
  - להעריך, בדיוק הטוב ביותר האפשרי, את מספר המשבצות הכלואות בשטח זה,
  - לחשב את ערך הגודל החדש המיוצג על ידי שטח של משבצת אחת, בהתאם לכיול צירי הגרף ויחידות המדידה הרשומות על הצירים,
  - להכפיל את תוצאות שני הצעדים הראשונים.

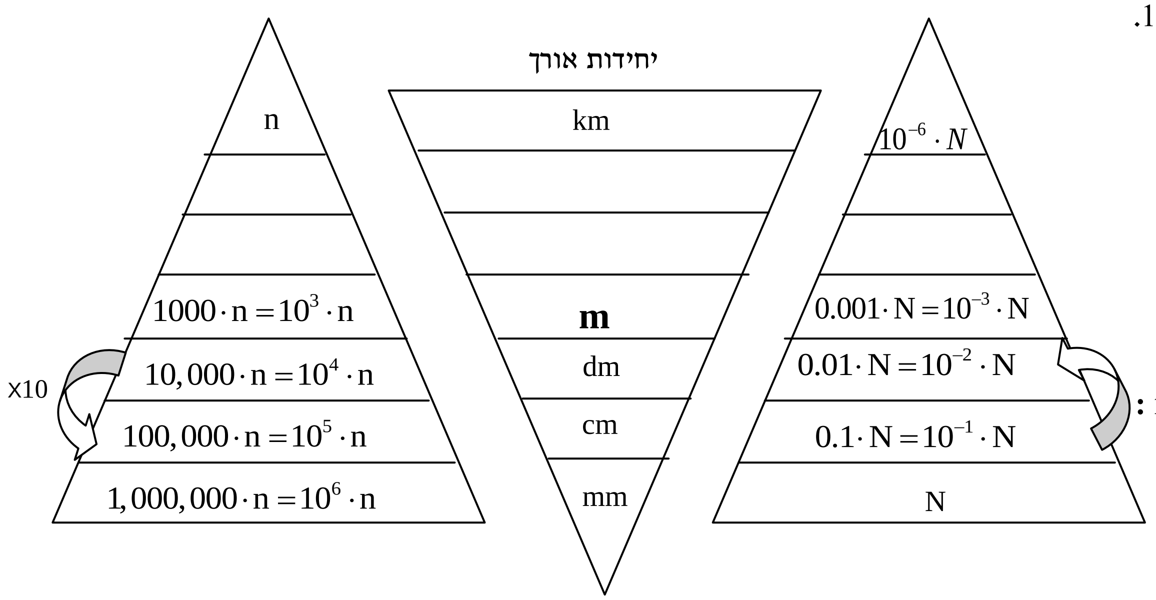
2.2 יחידות מדידה והמרתן

אפשר לבטא ערך של גודל פיזיקלי באמצעות יחידות מדידה שונות. ככל שהיחידה הנבחרת גדולה יותר, כך המספר המתאר את הערך קטן יותר.

מספר X **יחידה** = **מספר** X יחידה

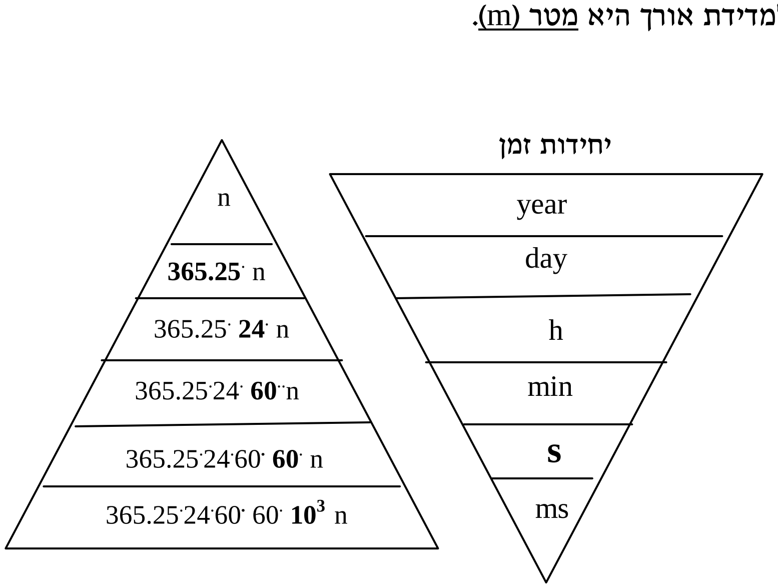
- **יחידות אורך**

בתרשים הבא מצוירים סולמות שמייצגים את הפעולות שיש לבצע כדי להמיר מספר גדול N של מילימטרים או מספר קטן n של קילומטרים ליחידות אורך אחרות. כפי שמצוין על ידי החיצים, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מטה (מיחידה גדולה לקטנה) דורש הכפלת המספר ב- 10 ולעומת זאת, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מעלה (מיחידה קטנה לגדולה) דורש חילוק המספר ב- 10.



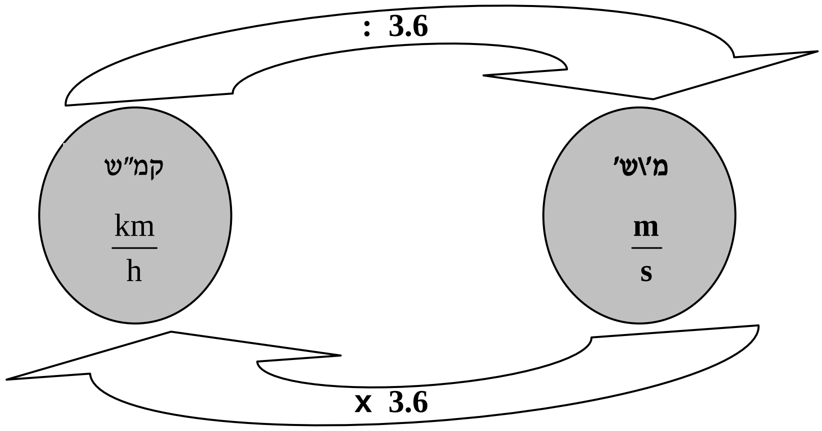
להזכירך, היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת אורך היא <u>מטר (m)</u>.

- **יחידות זמן**



היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת זמן היא <u>שנייה (s)</u>.

- **<u>יחידות מהירות</u>**



היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת מהירות היא <u>מטר בשנייה</u> $\left(\frac{m}{s}\right)$.

3. תרגילים

3.1 פונקציה קווית

1. נתונה הפונקציה $y = 8 - 4x$.
   א. האם פונקציה זאת היא לינארית, ריבועית, או אחרת? הסבר.
   ב. מהי משמעות הפרמטרים המספריים המופיעים בתבנית?
   ג. רשום ביטוי אפשרי של פונקציה אחרת, אשר הגרף שלה מקביל לגרף הפונקציה הנתונה.
   ד. האם הפונקציה המקורית עולה, או יורדת? הסבר.
   ה. האם הפונקציה החדשה מסעיף ג׳ עולה, או יורדת? הסבר.
   ו. האם גרף הפונקציה המקורית חותך את הצירים? אם כן, מהם שיעורי נקודות החיתוך?
   ז. כיצד עליך לשנות את תבנית הפונקציה המקורית כדי שהגרף שלה יעבור דרך ראשית הצירים?

2. נתונות שתי פונקציות $7 = y + x$ (I) ו- $x = 2y + 1$ (II) .
   א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני הגרפים.
   ב. שרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת.
   ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הגרפים.
   ד. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לבין ציר x ברביע הראשון.
   ה. כיצד ישתנו, אם בכלל, תשובותיך לסעיפים א׳-ד׳ אם מחליפים את האותיות x ו-y באותיות t ו-v בהתאמה?

3. * כאשר גוף נמצא בנקודה שהקואורדינטה שלה 2m, השעון הראה 3 שניות, וכאשר הוא היה בנקודה שהקואורדינטה שלה 9m, השעון הראה 5 שניות. בהנחה שמדובר על תלות קווית (לינארית) בין הקואורדינטה לבין הזמן ושסימניהם הם x ו- t:
   א. בנה טבלה עם הערכים הנתונים ושרטט גרף של x כפונקציה של t (x משתנה תלוי ו-t משתנה בלתי תלוי).
   ב. רשום (**באותיות בלבד**) משוואת קו ישר במערכת צירים (x,t), שבה השיפוע מסומן באות v והערך x של נקודת החיתוך עם הציר האנכי מסומן ב-x_0.
   ג. רשום את משוואת הקו הישר שבנית בסעיף ב׳ על סמך הנתונים המספריים של התרגיל.
   ד. מצא היכן (באיזו קואורדינטה x) היה הגוף כאשר השעון הראה אפס.
   ה. בנה מחדש גרף של המקום x כפונקציה של הזמן t בקנה מידה שונה מזה שבחרת בסעיף א׳. על סמך השוואה בין הגרפים בסעיפים א׳ ו- ה׳ הסק מהם ההבדלים בין שיפוע של גרף ״מתמטי״ לבין שיפוע של גרף ״פיזיקלי״?
   ו. מתי היה הגוף בראשית ציר המקום (כלומר, בנקודה שהקואורדינטה שלה אפס)?

4. * רוכב אופניים יוצא בשעה 5:00 בבוקר מביתו בתל-אביב ורוכב צפונה. בשעה 5:45 הוא עובר ליד הרצליה, ובין הרצליה לנתניה הוא רוכב במהירות קבועה של 10 מ'/ש'. ידוע שהמרחק מביתו להרצליה הוא 14.4 ק"מ והמרחק מהרצליה לנתניה הוא 21.6 ק"מ.

א. שרטט תרשים של הבעיה.

ב. בכמה זמן עובר הרוכב את המרחק בין הרצליה לנתניה?

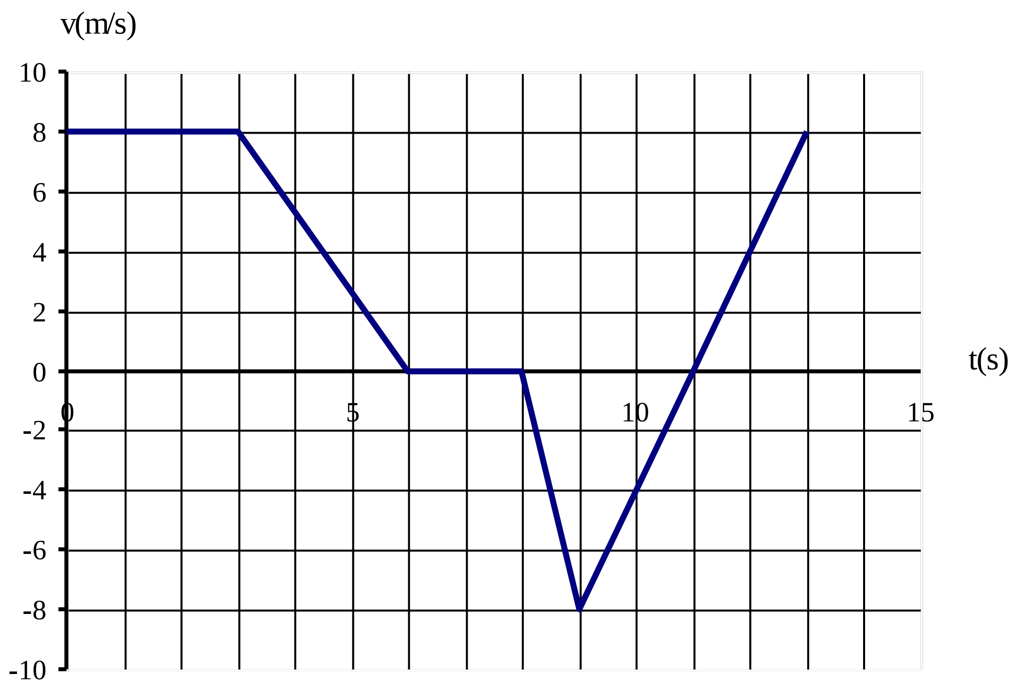
ג. שרטט גרף מהירות הרוכב כפונקציה של הזמן.

ד. שרטט גרף מיקום הרכב כפונקציה של הזמן.

ה. מהי המהירות הממוצעת של הרוכב מביתו עד נתניה?

ו. רשום את משוואות התנועה של רוכב האופניים בכל אחד מקטעי הרכיבה שלו, בהנחה שבכל קטע המהירות הייתה קבועה.

5. נתון גרף המהירות v כפונקציה של הזמן t של גוף הנע על קו ישר.



א. חלק את הגרף לחמישה קטעים שונים ורשום לגבי כל אחד מהקטעים את משוואת הקו.

ב. חשב את העתק הגוף ב- 13 השניות, על ידי חישובי שטחים (חשוב לזכור: שטח מעל ציר הזמן מייצג העתק חיובי ושטח שמתחת לציר הזמן מייצג העתק שלילי) בשתי דרכים – (1) על ידי שימוש בנוסחאות שטחים של הצורות הגיאומטריות המופיעות בגרף ו- (2) על ידי הערכת מספר המשבצות.

ג. מדוע תשובתך לסעיף ב', שהתקבלה בעקבות חישובי שטחים, היא ביחידות אורך (למשל m) ולא ביחידות שטח (למשל m^2)?

ד. האם לשיפוע של כל אחד מהקטעים הנ"ל יש יחידות? אם כן - מהן ומהי משמעות השיפוע של כל אחד מן הקטעים?

ה. חשב את המהירות הממוצעת שהייתה לגוף לאורך התנועה כולה.

ו. האם קטעים שמקבילים לציר הזמן מייצגים פונקציה? הסבר.

ז. אילו הגוף היה נע במהירות קבועה במשך אותו זמן והיה עובר אותו העתק בדיוק, איך היה נראה גרף המהירות v כפונקציה של הזמן t? הוסף גרף זה לגרף הנתון.

3.2 פונקציה ריבועית

6. נתונה הפונקציה $y = 10 + 6x^2 - 24x$.

א. בנה טבלה ובה עשרה ערכי x וערכי y המתאימים להם.

ב. שרטט גרף המתאר את הפונקציה במערכת צירים בעזרת הטבלה שבנית בסעיף א'.

ג. מצא את שיעוריהן של נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.

ד. חשב את הקואורדינטות של נקודת הקודקוד של הגרף.

ה. שרטט בקירוב הטוב ביותר האפשרי את המשיק לגרף בנקודה A (1,-8) ומצא את שיפועו. פרט את פעולותיך.

ו. בתחום בו הפונקציה עולה, האם שיפוע המשיק גדל, קטן או אינו משתנה? נמק.

7. * במעבדת הפיזיקה של מרכז מדעי ביצע תלמיד ניסוי באמצעות מערכת ממוחשבת כדי לקבוע את מיקומו של גוף הנע בקו ישר. תוצאות המדידות מופיעות בטבלה הבאה:

מקום x(cm)	0	1.20	2.88	5.04	7.68	10.80	14.40	18.48	23.04	28.08	33.60	39.60
זמן t(s)	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22

א. לפי התוצאות שהתקבלו שרטט את הגרף של מקום הגוף x (משתנה תלוי) כפונקציה של הזמן t (משתנה בלתי תלוי).

ב. בהנחה שהפונקציה x(t) היא ריבועית, רשום משוואה מתאימה לגרף שבנית בסעיף א'.

(זכור - הביטוי הכללי של פונקציה ריבועית במתמטיקה הוא: $y = ax^2 + bx + c$).

ג. כידוע, שיפוע המשיק לגרף x(t) מהווה בכל נקודת זמן את המהירות הרגעית של הגוף. האם מהירות הגוף תוך כדי תנועתו גְדֵלה, קְטֵנה או אינה משתנה? הסבר.

ד. כידוע, פונקצית מקום-זמן ריבועית מתארת תנועה שוות תאוצה. הביטוי הכללי של פונקצית מקום-זמן במקרה זה הוא: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. מתוך השוואה בין הביטוי שקיבלת בסעיף ב' לבין ביטוי כללי זה, מצא את הערכים של קבועי התנועה a , v_0 , x_0.

ה. על סמך תשובתך לסעיף ד', רשום ביטוי המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן v(t) ושרטט גרף של פונקציה זו.

ו. האם יש לשיפוע גרף הפונקציה v(t) יחידות פיזיקליות? אם כן מהן?

8. גוף נע על קו ישר. נתונה הפונקציה מקום-זמן של תנועתו:

$$x = 24 \cdot t - 3 \cdot t^2$$

א. מהם קבועי התנועה, כלומר המקום ההתחלתי x_0, המהירות ההתחלתית v_0 והתאוצה a?

ב. רשום פונקצית מהירות-זמן עבור הגוף הנתון.

ג. מלא את הטבלה :

t(s)	0	2	4	6	8	10	12
x(m)							
v(m/s)							

ד. שרטט את הגרפים : $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$ עבור פרק הזמן מ- $t=0$ עד ל $t=12s$.

3.3 יישור הגרף של פונקציה לא לינארית

9. * נתונה פונקציה $y = 6x^2$.

א. מהו סוג הפונקציה? הסבר.

ב. בנה טבלה ובה עשרה ערכים של x, החל מ- 0 עד 5 במרווחים קבועים, והערכים של y המתאימים.

ג. שרטט גרף של הפונקציה על סמך הטבלה והוסף לגרף קו מגמה המתאים ביותר לחוקיות הפונקציה.

ד. הוסף לטבלה עמודה/שורה נוספת של x^2 ומלא אותה.

ה. שרטט גרף של y כתלות ב- x^2 והוסף קו מגמה מתאים.

ו. מהי המסקנה המתבקשת מהפעולות שנעשו בתרגיל?

10. * לפניך מספר תבניות של פונקציה. בחר לגבי כל תבנית משתנה חדש כך, שהקשר החדש יהיה לינארי. ציין איזה משתנה נבחר כמשתנה בלתי תלוי.

א. $y = 0.5x^2$

ב. $y = \sqrt{x}$

ג. $y = \dfrac{3}{x^2}$

ד. $y = \dfrac{5}{x+1}$

ה. $y = 6\sqrt{x+2}$

ו. $y = \cos(x)$

11. * במעבדת המכניקה נתבקשו התלמידים לשחרר ממנוחה מגבהים שונים משקולת, אשר מחוברת לסרט נייר העובר דרך רשם זמן. שחרור המשקולת מכל גובה, תרם לתלמיד סרט המכיל אוסף עקבות (מעין תצלום סטרובוסקופי).

א. איך יכול התלמיד לדעת מהסרט מהו מרחק הנפילה של הגוף, וכמה זמן גוף היה בתנועה?

ב. תוצאות עיבוד הסרטים שנעשה ע"י התלמיד מופיעות בטבלה הבאה:

מרחק הנפילה y (cm)	0	4.9	20.1	44.8	80.2	125.0
זמן הנפילה t (sec)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

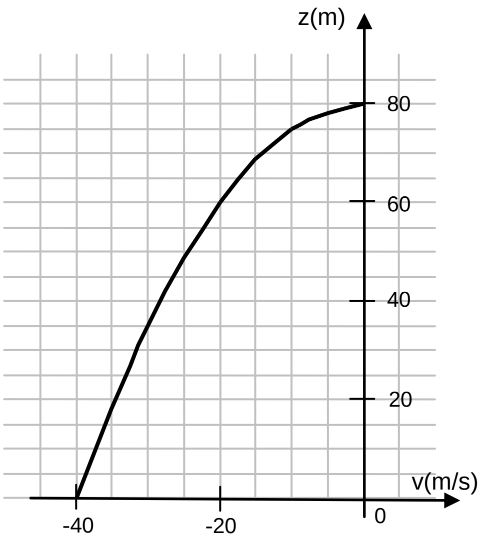
ג. בנה גרף של מרחק הנפילה כפונקציה של הזמן.

ד. בהסתמך על ידע בנושא "נפילה חופשית", בחר משתנה חדש כך שיתקבל יחס ישר בין המשתנה y לבין המשתנה החדש.

ה. הוסף שורה לטבלה עם הערכים של המשתנה החדש ובנה גרף נוסף של y כפונקציה של המשתנה החדש.

ו. עזור לתלמיד ומצא על פי הגרף הנוסף את תאוצת הנפילה החופשית. הסבר צעדיך.

12. ** לפניך מופיע חלק מהגרף "מקום כפונקציה של מהירות" לגבי גוף הנזרק אנכית מעלה, כפי שהתקבל במעבדת הפיזיקה באמצעות מערכת מדידה ממוחשבת.



א. בהנחה שהתנגדות האוויר זניחה, מצא את התבנית המתמטית המקשרת בין שני המשתנים המופיעים בגרף.

ב. לפי התבנית, בחר משתנה בלתי תלוי חדש ומלא טבלת ערכים מתאימה.

ג. שרטט גרף על סמך הטבלה שבסעיף ב' ומצא בעזרתו את תאוצת הנפילה החופשית.

3.4 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים

13. א. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x+4y=24 \\ 11=x+2y \end{cases}$$

ב. שרטט במערכת צירים אחת את שני הקווים הישרים המתאימים לשתי המשוואות וציין מהו מצבם ההדדי.

ג. במערכת המשוואות הנתונה, החלף את המספר 11 שבמשוואה השנייה במספר 12 ופתור את המערכת החדשה שקיבלת.

ד. שרטט על מערכת צירים אחת את שני הקווים הישרים המתאימים לשתי המשוואות שקיבלת בסעיף ג׳ וציין מהו מצבם ההדדי.

ה. מהו התנאי לכך ששני קווים ישרים כלשהם יחתכו זה את זה?

14. א. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2x+3y=-3 \\ 3x-2y=-11 \end{cases}$$

(1) בשיטת ההצבה (2) בשיטת השוואת מקדמים (3) בשיטה גרפית

ב. חשב את השיפוע של כל אחד מהישרים המתארים את המשוואות הנתונות.

ג. האם ייתכן שסימני שני השיפועים זהים ועדיין הקווים נחתכים? הסבר.

15. * מכונית יצאה בשעה 11:00 בבוקר ממודיעין לחצור הגלילית, המרוחקת ממנה 170ק״מ. בשעה 12:00 יצא אופנוע מפתח-תקווה לחצור הגלילית – מרחק 120ק״מ. מניחים ששני כלי הרכב נסעו במהירות קבועה. המכונית הגיעה לחצור הגלילית 0.6 שעות לפני האופנוע ומהירותה הייתה גדולה ממהירות האופנוע ב- 10קמ״ש.

א. חשב את המהירויות של המכונית והאופנוע.

ב. מצא מהי המהירות של האופנוע יחסית למכונית -

(1) בפרק הזמן בין שעה 11:00 לשעה 12:00 ,

(2) אחרי שעה 12:00.

ג. מהי המהירות של המכונית יחסית לאופנוע באותם פרקי זמן כמו בסעיף ב׳ ?

16. * גוף א׳ הנמצא במרגלות צוק נזרק מהרצפה כלפי מעלה במהירות שגודלה 80 מטר בשנייה. באותו רגע נזרק גוף ב׳ מראש הצוק, שגובהו 600 מטר, כלפי מטה במהירות שגודלה 40 מטר לשנייה. הנח שהגופים אינם מתנגשים, אלא חולפים זה ליד זה. כמו כן, הנח שהתנגדות האוויר זניחה ושתאוצת הנפילה החופשית היא 10 מטר לשנייה בריבוע.

א. רשום את משוואת התנועה y=f(t) של גוף א׳.

ב. רשום את משוואת התנועה של גוף ב׳.

ג. פתור את מערכת המשוואות שקיבלת בסעיפים א׳ ו ב׳.

ד. שרטט במערכת צירים אחת את שני הגרפים, שמייצגים את שתי המשוואות הנ״ל. האם הגרפים נחתכים? אם כן - הסבר מהי משמעותה של נקודת החיתוך. אם לא - הסבר מדוע לא.

ה. רשום את משוואות המהירות v=f(t) עבור שני הגופים.

ו. פתור את מערכת המשוואות שהתקבלה בסעיף ה׳, הן באחת השיטות האלגבריות והן בשיטה גרפית ונסח מסקנות.

17. השלם את הטבלה (רשום את כל המספרים בכתיב מדעי בלבד):

	ק"מ	ס"מ	מ'		דצ"מ
	km			mm	
1	7				
2				5	
3					100
4			20		
5		625.7			
6	29.2				
7					0.7
8				0.95	

18. * השלם את הטבלה (רשום את כל המספרים בכתיב מדעי בלבד):

			שנה	ש'	שעה	
	min	day				ms
1			0.5			
2		3				
3					3/4	
4	39					
5				70		
6						57
7		365.25				
8				120		

תשובות לתרגילים

1. ו. (0,8) , (2,0)
2. א. (I) (0,7) , (7,0)
(II) (0,-0.5) , (1,0)
ג. (5,2)
ד. 6
3. ד. -8.5m
ו. ~2.43s
4. א. 0.6h
ב. ~26.67km/h
5. ב. 32m
ד. ~2.46m/s
6. ג. (0.47,0) , (3.53,0) , (0,10)
ד. (2,-14)
ה. -12
7. ד. 0
48cm/s
$1200cm/s^2$
12. ג. $-10m/s^2$
14. א. (-3,1)
ב. $-\frac{2}{3}$ ו- $\frac{3}{2}$
15. מכונית – 85km/h או 50km/h
אופנוע – 75km/h או 40km/h
16. ג. 5s , 275m

פרק ב - קינמטיקה של תנועה במישור

מושגים מתמטיים – פרופורציה, צורות גיאומטריות, היטלים, פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זווית, משפטי קוסינוס וסינוס, וקטורים במישור - הצגה פולארית וקרטזית, פעולות עם וקטורים.

קשר לעולם הפיזיקה – שני הסוגים של גדלים פיזיקליים – סקלריים וקטוריים, חיבור וקטורי לחישוב וקטור שקול, חיסור וקטורי לחישוב וקטור שינוי, מקום יחסי ומהירות יחסית.

1. נושאים מתמטיים

1.1 פרופורציות

- פרופורציה היא שוויון בין שתי מנות: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
- התכונה העיקרית של פרופורציה היא שמכפלות האיברים בכל אחד מהאלכסונים שוות, כלומר $a\cdot d=b\cdot c$.
- מהתכונה העיקרית נובע שניתן לנייד את האיברים בכל אלכסון. למשל מהפרופורציה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אפשר לקבל $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, או $\frac{a\cdot d}{b}=\frac{c}{1}$ $\left(\frac{a\cdot d}{b}=c\right)$, או $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.
- על ידי ניוד מתאים של איברים אפשר לבטא איבר אחד באמצעות שלושת האיברים האחרים.
- מפרופורציה נתונה אפשר לקבל פרופורציות אחרות על ידי חיבור\חיסור בין המכנים למונים. למשל מ- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אפשר לקבל $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$.

1.2 גיאומטריה

קווים

- קו ישר הוא אינסופי בשני קצותיו (בשני הכיוונים) . לקו ישר אין נקודת התחלה ואין נקודת סוף.

תרשים 1 - קו ישר

- מקו ישר ניתן לקבל שתי קרניים. <u>קרן</u> היא אינסופית רק בכיוון אחד (יש לה התחלה, אך אין לה סוף).

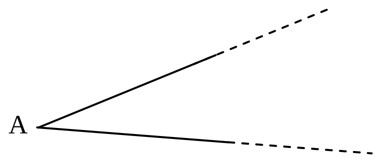
תרשים 2 - שתי קרניים

- חלק של קו ישר המוגבל בשני הקצוות מכונה <u>קטע</u> ישר.

תרשים 3 - קטע ישר

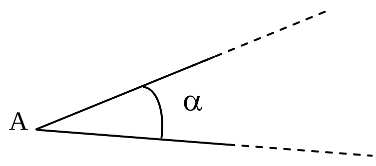
<u>זוויות</u>

- זווית היא הצורה הגיאומטרית הנוצרת בין שתי קרניים. נקודת המפגש A של הקרניים מכונה קדקוד הזווית (תרשים 4).

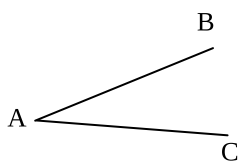


תרשים 4 - זווית

- נהוג לסמן את הזווית באחת משתי דרכים:
  - באמצעות אות יוונית קטנה, למשל α (תרשים 5).
  - באמצעות שלוש נקודות לפי הסדר: נקודה על אחת הקרניים, נקודת הקדקוד ונקודה על הקרן האחרת (תרשים 6).

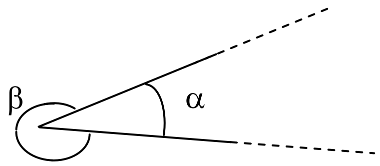


תרשים 5 - זווית α



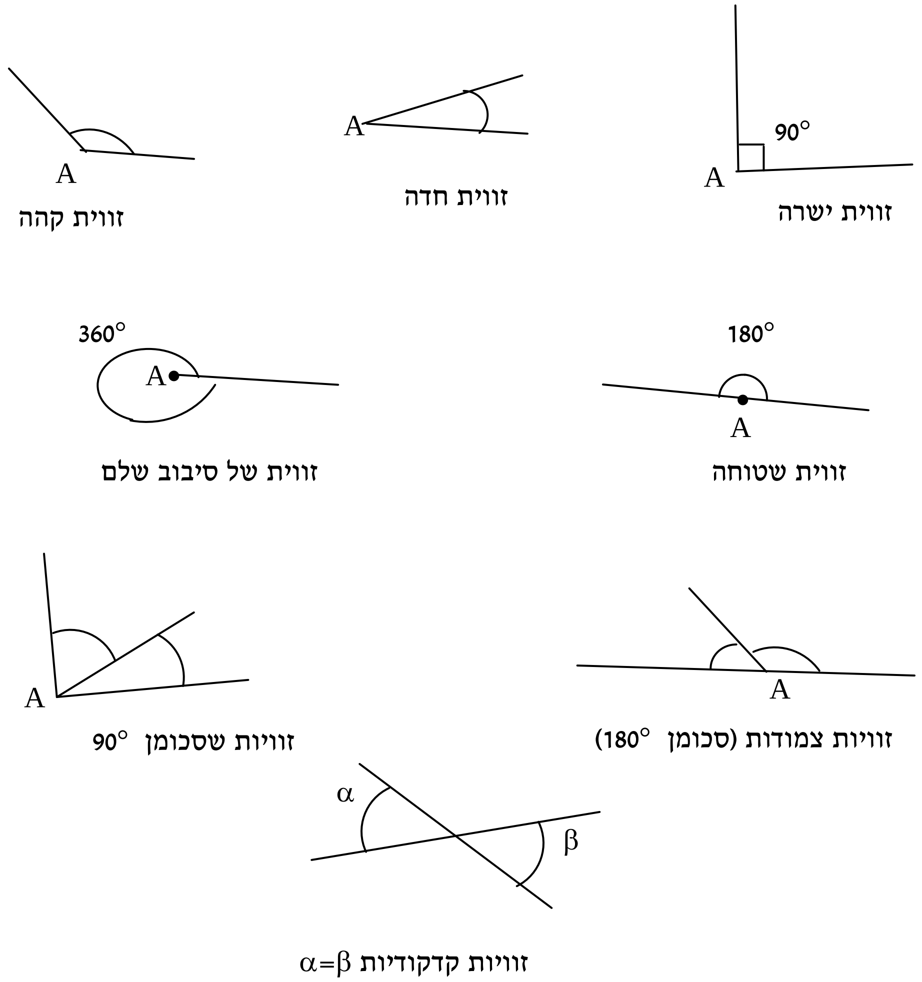
תרשים 6 - זווית BAC

- יחידת המדידה המקובלת של זוויות היא <u>מעלה</u>. בפיזיקה יחידת המדידה הבסיסית (SI) עבור זוויות היא <u>רדיאן</u> (rad) והיא תוגדר בפרק ה'.
- שתי קרניים המתחילות מאותה נקודה יוצרות למעשה שתי זוויות, שסכומן 360^o (תרשים 7).



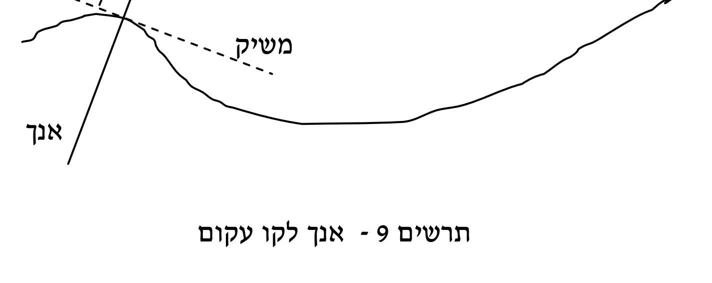
תרשים 7 – שתי הזוויות הנוצרות על ידי שתי קרניים. $\alpha+\beta=360^o$

- כאשר שתי הקרניים חופפות, הן יוצרות שתי זוויות – אחת של 0^{o} והשנייה של 360°.
- בתרשים 8 מתוארות זוויות מסוגים שונים:



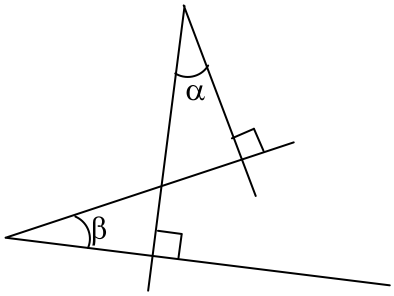
תרשים 8 - סוגי זוויות

- אנך לקו ישר הוא קו היוצר זווית ישרה (של 90°) עם הקו הישר.
- אנך לעקום מישורי, בנקודה נתונה, הוא קו היוצר זווית ישרה עם המשיק (קו ישר הנוגע בעקום בנקודה אחת בלבד) לעקום באותה נקודה (תרשים 9). העקום, המשיק והאנך נמצאים במישור אחד.



תרשים 9 - אנך לקו עקום

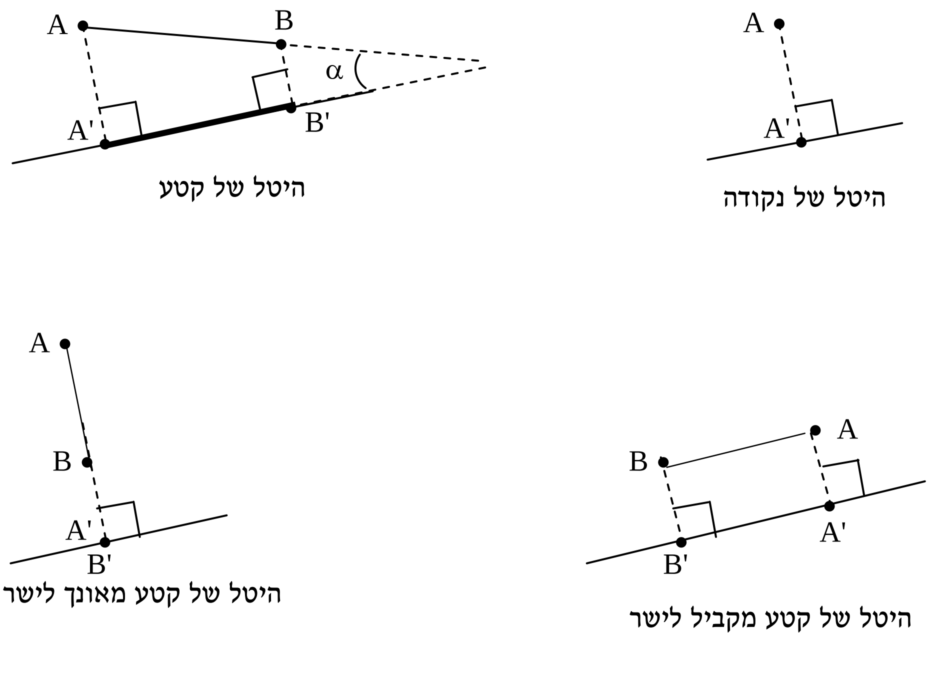
- שתי זוויות אשר צלעותיהן מאונכות זו לזו בהתאמה, שוות זו לזו (תרשים 10).



תרשים 10 – זוויות שצלעותיהן מאונכות זו לזו $\alpha=\beta$

היטלים

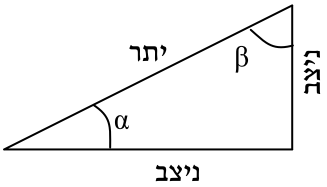
- ההיטל של נקודה A על ישר הוא הנקודה A' שבה האנך לישר דרך A חותך את הישר.
- היטלו של קטע AB על ישר הוא הקטע A'B' שבין היטלי הנקודות A ו- B. אורך ההיטל הוא: $A'B' = AB\cdot\cos\alpha$, כאשר α היא הזווית בין AB לבין הישר.
- אם הקטע AB מאונך לישר, היטלו על הישר הוא נקודה, כלומר אורך ההיטל הוא 0.
- אם הקטע AB מקביל לישר, אורך היטלו על הישר שווה לאורך הקטע.



תרשים 11 - היטלים

משולשים

- משולשים - כאשר מחברים 3 נקודות שלא נמצאות על אותו ישר בקטעים ישרים, מקבלים משולש.
- סכום הזוויות הפנימיות בכל משולש הוא $180°$.
- אם אחת מזוויות משולש היא ישרה, המשולש מכונה משולש ישר- זווית; הצלעות היוצרות את הזווית הישרה מכונות ניצבים והצלע השלישית מכונה יתר (תרשים 12). בין שלוש הצלעות של משולש ישר זווית קיים קשר מתמטי המוכר כמשפט פיתגורס: ריבוע היתר שווה לסכום ריבועי הניצבים.



תרשים 12 – משולש ישר זווית

$$(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$$

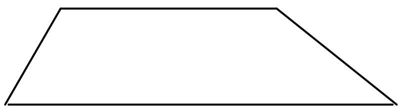
- במשולש ישר זווית, הזוויות החדות משלימות זו את זו ל-$90°$.

$$\alpha+\beta=90°$$

מרובעים

- מרובע הוא מצולע שמתקבל כתוצאה מחיבור של 4 נקודות שלא נמצאות על אותו ישר, באמצעות קטעים ישרים.

- מרובע ששתיים מצלעותיו מקבילות זו לזו נקרא טרפז (תרשים 13). שתי הצלעות המקבילות מכונות "בסיסים" ושתי הצלעות האחרות מכונות "שוקיים".

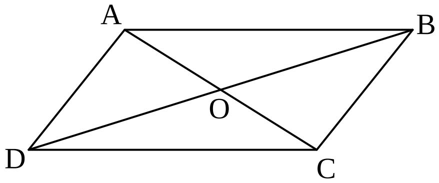


תרשים 13- טרפז

- מרובע שבו יש שני זוגות צלעות המקבילות זו לזו נקרא מקבילית (תרשים 14).

הצלעות המקבילות שוות זו לזו:

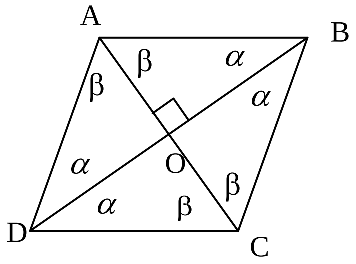
$$AD = BC \; ; \; DC = AB$$



תרשים 14 - מקבילית

אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה :

$$OB = OD \; ; \; OA = OC$$



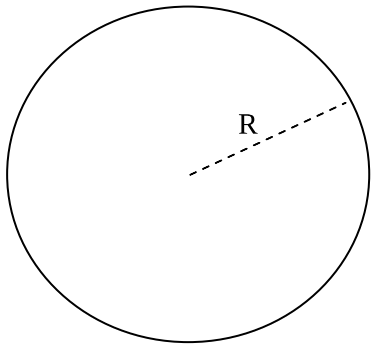
תרשים 15 - מעוין

- מקבילית שכל צלעותיה שוות באורכן נקראת <u>מעוין</u> (תרשים 15).

$$\boxed{AB = BC = CD = DA}$$

במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.

$$\boxed{AC \perp BD}$$

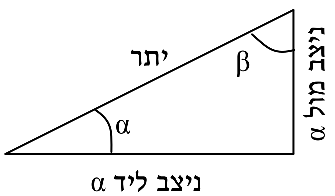


תרשים 16 - מעגל

<u>מעגל</u> (תרשים 16)

- <u>מעגל</u> הוא אוסף הנקודות במישור הנמצאות כולן באותו מרחק R מנקודה קבועה המכונה "מרכז המעגל".
- <u>רדיוס</u> מעגל R הוא הקטע המחבר בין מרכז המעגל ונקודה כלשהי על ההיקף.
- היקף המעגל = $2\pi R$
- אוסף כל הנקודות הנמצאות על המעגל ובתוכו מכונה "<u>עיגול</u>".

1.3 <u>טריגונומטריה</u>



תרשים 17 – משולש ישר זווית

- הגדרה של פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר-זווית

פונקציה <u>סינוס</u>:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{הניצב מול } \alpha}{\text{היתר}}}$$

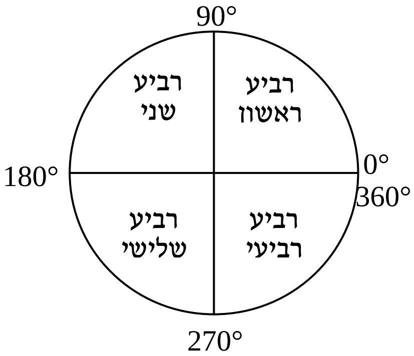
פונקציה <u>קוסינוס</u>:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{הניצב ליד } \alpha}{\text{היתר}}}$$

פונקציה <u>טנגנס</u>:

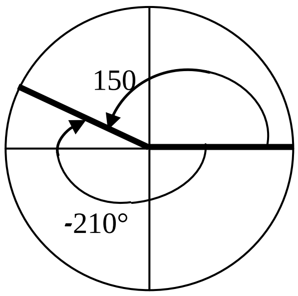
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{הניצב מול } \alpha}{\text{הניצב ליד } \alpha}}$$

- בין שלוש הפונקציות הנ"ל מתקיים הקשר: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



תרשים 18- מעגל יחידה

- בתרשים 18 מתואר מעגל המכונה <u>מעגל טריגונומטרי</u>. למעגל זה המאפיינים הבאים:
  - הרדיוס שלו שווה ליחידת אורך אחת.
  - "הכיוון הטריגונומטרי החיובי" במעגל זה מוגדר כמנוגד לכיוון הסיבוב של מחוגי השעון.
  - מעגל זה מחולק לארבעה רבעים, הממוספרים לפי הכיוון הטריגונומטרי החיובי.
  - זווית מרכזית נבנית כך שהקרן הראשונה היא תמיד קבועה (נייחת) בכיוון המסומן ב- $0°$ והקרן השנייה (ניידת) נמצאת ברביע המתאים לגודל הזווית.
  - ערך הזווית הוא חיובי או שלילי, בהתאם לכיוון הסיבוב של הקרן ניידת ביחס לנייחת.



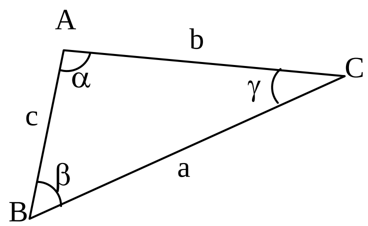
תרשים 19- מיקום זוויתי

- בתרשים 19 מופיעה דוגמה בה הקרן הניידת נמצאת ברביע השני. אומרים ש<u>מיקומה הזוויתי</u> הוא $+150^o$ או -210^o .
- בכל משולש (תרשים 20) מתקיימים שני משפטים המקשרים בין הצלעות לזוויות.
  - <u>משפט הקוסינוסים</u> המתואר עבור הזווית α על ידי הביטוי:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

<u>הערה</u>: אם $\alpha = 90^o$ מתקבל משפט פיתגורס.

  - <u>משפט הסינוסים</u> – היחס בין אורך הצלע לבין סינוס הזווית מולה הוא קבוע:

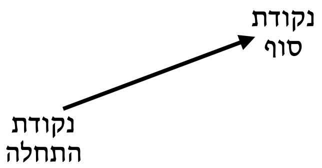


תרשים 20 - משולש כללי

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

- שימוש במחשבון כיס לחישובים טריגונומטריים - אופן המעבר מזווית לפונקציה טריגונומטרית (סינוס, קוסינוס או טנגנס) או להיפך מתוארים בתרשים הבא:

1.4 וקטורים במישור



תרשים 21 - וקטור

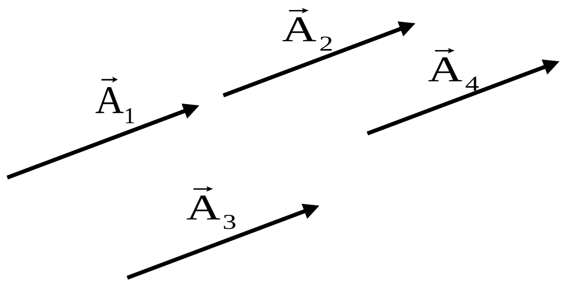
- <u>וקטור</u> הוא קטע מכוון מנקודת התחלה אל נקודת סוף (קצה הווקטור או ראש הווקטור) (תרשים 21).
- מאפייני וקטור : - גודל, שהוא אורכו של הווקטור.
  - כיוון, המוגדר על ידי הזווית בין הווקטור לכיוון אחר, מוכר.

בחירת קנה המידה לצורך שרטוט אורכו של וקטור היא שרירותית.

- בפיזיקה מסמנים בדרך כלל וקטור באמצעות אות אחת גדולה או קטנה. כדי להבחין שמדובר על וקטור, האות יכולה להיות רשומה בכתב מודגש (למשל **A**) או עם חץ מעליה (למשל $\vec{A}$). בחוברת זאת וקטורים יהיו רשומים על ידי אות אחת או שתיים, עם חץ מעליהן.
- ניתן להעתיק וקטור במקביל למצבו המקורי (בלי שינוי בגודלו ובכיוונו) ועקב כך, למרות שזהו שינוי במיקומה של נקודת ההתחלה, תכונות הווקטור לא משתנות. בתרשים 22 מתקיים:

$$\boxed{\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}_3 = \vec{A}_4}$$

כי יש להם אותו גודל ואותו כיוון.



תרשים 22 - וקטורים שווים

<u>וקטורים מקבילים ואנטי- מקבילים</u>

- יש להבדיל בין שני מקרים של וקטורים הנבנים על ישרים מקבילים:

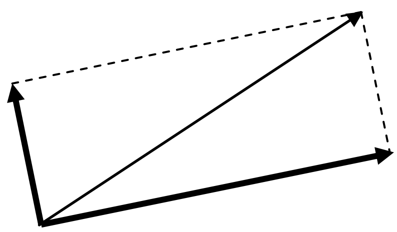
- וקטורים <u>מקבילים</u>, שהם בעלי אותו כיוון (תרשים 23א), ולכן הזווית ביניהם 0^o.

- וקטורים <u>אנטי- מקבילים</u>, שהם בעלי כיוונים מנוגדים (תרשים 23ב), ולכן הזווית ביניהם 180^o.

תרשים 23 - וקטורים מקבילים ואנטי- מקבילים

<u>רכיבי וקטור</u>

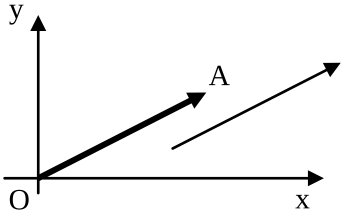
- אפשר להחליף וקטור נתון בשני וקטורים ניצבים זה לזה, כך שהווקטור המקורי הוא אלכסון המלבן המוגדר על ידי הווקטורים החדשים (ראה תרשים 24).


תרשים 24 - פרוק וקטור

נוח יותר כאשר הווקטורים החדשים נמצאים על הצירים של מערכת צירים קרטזיים אשר נבחרה במישור. הווקטורים החדשים מכונים <u>רכיבים קרטזיים</u> של הווקטור המקורי ופעולה זאת נקראת "פרוק הווקטור הנתון לרכיביו הקרטזיים".

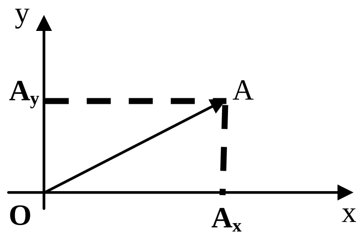
- תהליך קבלת הרכיבים הקרטזיים של וקטור (פירוק הווקטור לרכיבים):

(1) מעתיקים את הווקטור הנתון כך שהתחלתו תתלכד עם ראשית הצירים – וקטור $\vec{OA}$ (תרשים 25).



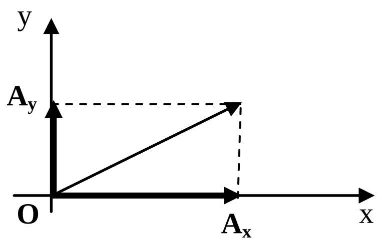
תרשים 25 - שלב (1) לקבלת רכיבי וקטור

(2) מורידים אנכים AA_x ו- AA_y לצירים מהקצה A של הווקטור המועתק (תרשים 26).



תרשים 26 - שלב (2) לקבלת רכיבי וקטור

(3) בונים את הווקטורים $\vec{OA}_x$ ו- $\vec{OA}_y$, שהם הרכיבים הקרטזיים של $\vec{OA}$ (תרשים 27).

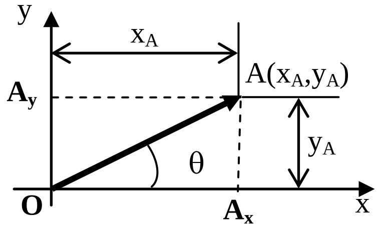


תרשים 27 - הרכיבים הקרטזיים

<u>**הצגות של וקטור**</u>

ניתן להציג וקטור בשתי דרכים:

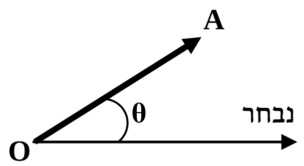
א. <u>הצגה קרטזית (אלגברית)</u> – באמצעות שיעורי הקצה של הווקטור, כאשר התחלתו בראשית הצירים (תרשים 28



תרשים 28 - הצגה קרטזית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי שיעורי הקצה**, $\vec{OA} = (x_A, y_A)$

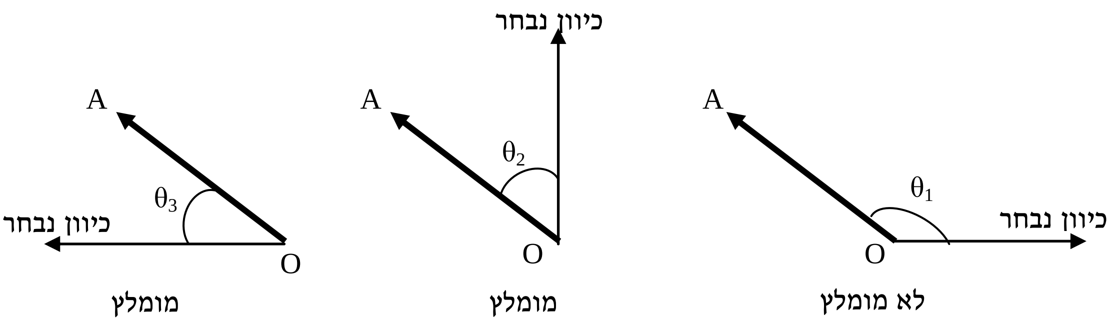
ב. <u>הצגה פולארית (קוטבית או גיאומטרית)</u> – באמצעות גודל וכיוון יחסית לכיוון נבחר (תרשים 29)



תרשים 29 - הצגה פולארית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי גודלו וכיוונו**, (OA, θ), **או** $(\left\|\vec{OA}\right\|, \theta)$

הערה - מומלץ שהזווית θ , המגדירה את כיוון הווקטור, תהיה <u>חדה</u>. לשם כך יש לבחור כיוון מתאים שאליו מייחסים את הזווית (ראה דוגמאות בתרשים 30).



תרשים 30 - הגדרת כיוון הווקטור

- מעברים בין שתי ההצגות (ראה גם תרשים 28) :

א. נתון הייצוג הפולארי (הגיאומטרי) (OA, θ) . חישוב הרכיבים הקרטזיים, שהם מרכיביו של הייצוג הקרטזי: $OA_y = OA \cdot \sin\theta$, $OA_x = OA \cdot \cos\theta$

ב. נתון הייצוג הקרטזי (האלגברי) (OA_x, OA_y). חישוב הגודל והכיוון, המהווים את מרכיביו של הייצוג הפולארי: (OA, θ)

גודל הווקטור - $OA = \sqrt{OA_x^2 + OA_y^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

כיוון הווקטור - $\tan\theta = \dfrac{OA_y}{OA_x} = \dfrac{y_A}{x_A}$

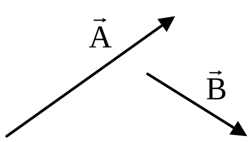
הערה: במידה שהווקטור לא נמצא ברביע הראשון, מאפיינים את כיוונו בהתאם להמלצות שלעיל.

<u>פעולות עם וקטורים</u>

<u>א. פעולות עם וקטורים בייצוג פולארי (גיאומטרי)</u>

בכל פעולה נתאר כיצד מקבלים את הווקטור תוצאה על ידי <u>תרשים</u> מתאים. אפשר לחשב את הגודל והכיוון של וקטור זה בעזרת משפטי הסינוסים והקוסינוסים הרשומים בסעיף 1.3 של פרק זה.

- <u>חיבור</u> וקטורי של שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא פעולה, שכתוצאה ממנה מתקבל <u>וקטור סכום</u> $\vec{C}$, כך ש- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

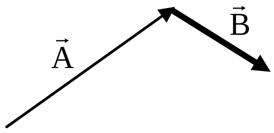


תרשים 31 - נתונים שני וקטורים

תהליך קבלת הווקטור $\vec{C}$, כאשר נתונים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$:

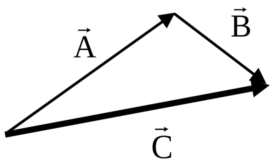
דרך I למציאת וקטור סכום - חיבור לפי <u>כלל המשולש (תרשימים 32 ו- 33)</u>:

(1) מעתיקים את אחד הווקטורים הנתונים, כך שהתחלתו תהיה בקצה הווקטור האחר.



תרשים 32 -
העתקה של וקטור אחד בסוף של השני (1)

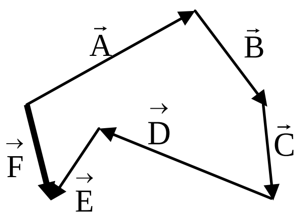
(2) מחברים את נקודת ההתחלה של הווקטור הראשון עם קצה הווקטור השני. כיוונו של וקטור הסכום המתקבל הוא אל קצה הווקטור השני.



תרשים 33 - חיבור וקטורי (2)

אם מחברים יותר משני וקטורים, אפשר להכליל את כלל המשולש (תרשים 34) – כלל המצולע:

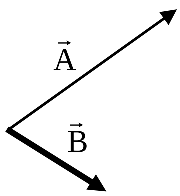
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}=\vec{F}$$



תרשים 34 - המצולע לחיבור חמישה וקטורים

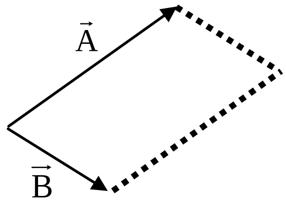
דרך II למציאת וקטור סכום – חיבור לפי <u>כלל המקבילית</u> (תרשימים 35 - 37):

(1) מסדרים את הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששניהם יתחילו מאותה נקודה.



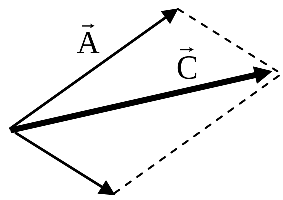
תרשים 35 -
סידור התחלת הווקטורים מאותה נקודה (1)

(2) בונים מקבילית כך ש- $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מהווים שתי צלעות צמודות שלה.



תרשים 36 -
בניית מקבילית (2)

(3) הווקטור $\vec{C}$ מתקבל לאורך אלכסון המקבילית, המתחיל מהנקודה המשותפת של הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ והוא מכוון כלפי הקודקוד הרביעי של המקבילית.



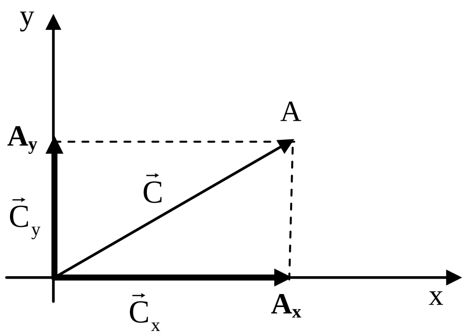
תרשים 37 -
האלכסון הוא וקטור הסכום (3)

<u>הערה</u>: וקטור הוא הסכום הווקטורי של רכיביו.

$$\boxed{\vec{OA} = \vec{OA_x} + \vec{OA_y}}$$

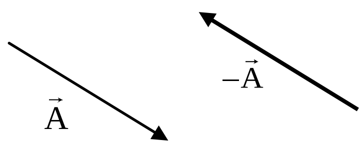
או ברישום של וקטור על ידי אות אחת:

$$\boxed{\vec{C} = \vec{C_x} + \vec{C_y}}$$



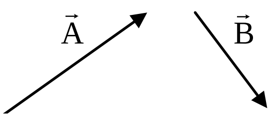
תרשים 38 -
וקטור הוא סכום וקטורי של רכיביו

- <u>הווקטור הנגדי </u>לווקטור נתון $\vec{A}$ הוא וקטור בעל אותו גודל אבל בכיוון מנוגד. רושמים אותו $-\vec{A}$ (תרשים 39).
הסכום של וקטור והנגדי שלו שווה ל- 0.



תרשים 39 - וקטור נגדי

- <u>חיסור</u> וקטורי של שני וקטורים נתונים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא פעולה של מציאת <u>וקטור הפרש</u> $\vec{D}$. נדגים בהמשך כיצד מגיעים להפרש $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ ($\vec{A}$ מכונה מחוסר, $\vec{B}$ מכונה מחסר).
כמובן, אותם שני וקטורים יכולים ליצור עוד וקטור הפרש, $\vec{D}' = \vec{B} - \vec{A}$ ובין שני וקטורי הפרש מתקיים $\vec{D}' = -\vec{D}$.

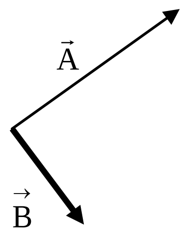


תרשים 40 - נתונים שני וקטורים

דרך I למציאת וקטור הפרש - חיסור <u>בשיטת המשולש</u>

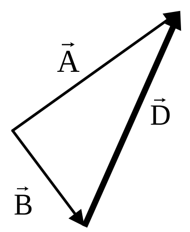
(תרשימים 41 ו- 42):

(1) מסדרים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששניהם יתחילו מאותה נקודה.



תרשים 41 -
וקטורים מתחילים מאותה נקודה (1)

(2) מחברים את קצותיהם של שני הווקטורים; כיוונו של $\vec{D}$ הוא כלפי המחוסר $\vec{A}$.



תרשים 42 - וקטור הפרש (2)

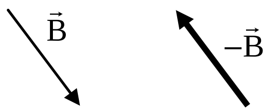
<u>הערה</u>: אפשר לראות שווקטור ההפרש $\vec{D}$ משלים את המחסר $\vec{B}$ למחוסר $\vec{A}$, כלומר $\vec{B} + \vec{D} = \vec{A}$

דרך II למציאת וקטור הפשר - חיסור <u>בשיטת החיבור עם הנגדי</u> (תרשימים 43 ו- 44):

ניתן לכתוב: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

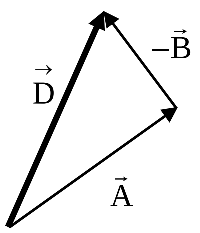
תהליך מציאת $\vec{D}$:

(1) בונים את $-\vec{B}$, שהוא הווקטור הנגדי ל- $\vec{B}$:



תרשים 43 - וקטור נגדי (1)

(2) מחברים את $-\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ באחת משיטות החיבור שתוארו לעיל:



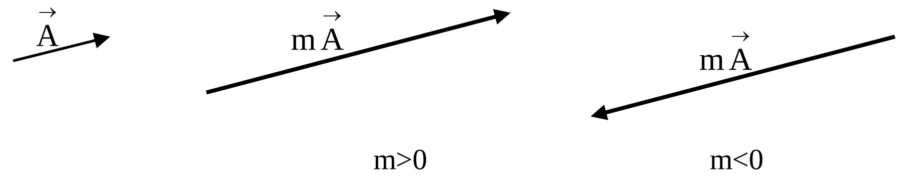
תרשים 44 -
וקטור הפרש (2)

- מכפלה בין וקטור למספר (סקלר)

- תוצאה של מכפלת וקטור $\vec{A}$ בסקלר m היא וקטור $\vec{B}$, כך שכותבים $\vec{B} = m\vec{A}$.
- גודלו של הווקטור $\vec{B}$:

$$B = |m| \cdot A$$

- כיוונו של הווקטור $\vec{B}$ הוא מקביל ל- $\vec{A}$ אם m חיובי ואנטימקביל ל- $\vec{A}$ אם m שלילי (תרשים 45).



תרשים 45 - מכפלת וקטור בסקלר

<u>הערה חשובה:</u> הדרכים שהוצגו עד כאן לביצוע פעולות שונות עם וקטורים בייצוג פולארי מאפשרות מתן תשובה איכותית. במידה ונדרשת תשובה כמותית בעזרת ייצוג פולארי בלבד, יש להשתמש במשפטי סינוסים וקוסינוס או לבצע סרטוט מדויק, כלומר למדוד במדויק את הזוויות ולסרטט את הווקטורים בקנה מידה).

<u>ב. פעולות עם וקטורים בייצוג קרטזי (אלגברי)</u>

<u>ניתן לבצע פעולות בווקטורים על ידי שימוש ברכיביהם הקרטזיים. לשם כך יש לבצע את הפעולות הבאות:</u>

(1) פירוק כל אחד מן הווקטורים הנתונים לרכיבים הקרטזיים בתרשים

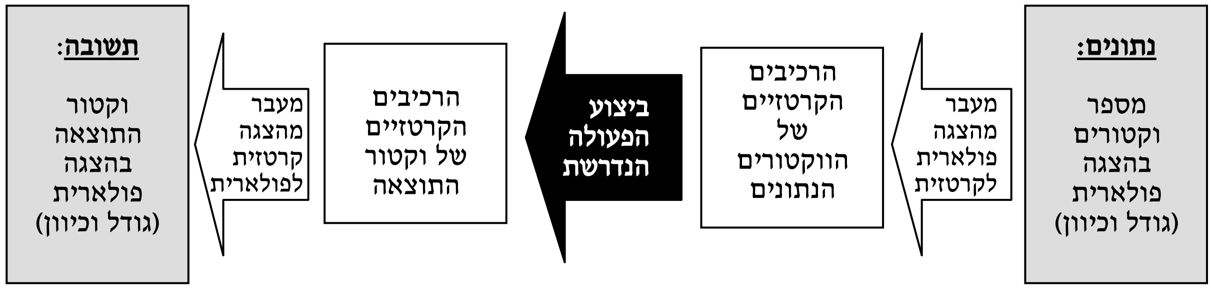
(2) חישוב הרכיבים

(3) ביצוע הפעולה הנדרשת בנפרד בכל ציר

- חיבור - $\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$
- חיסור - $\begin{cases} D_x = A_x - B_x \\ D_y = A_y - B_y \end{cases}$
- כפל בסקלר - $\begin{cases} B_x = mA_x \\ B_y = mA_y \end{cases}$

(4) מציאת הגודל והכיוון של התוצאה.

נסכם את השלבים השונים על ידי תרשים הזרימה הבא:



2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

בפיזיקה יש להבדיל בין שני סוגים של גדלים פיזיקליים:

- גדלים סקלריים, לדוגמה: מסה, זמן, טמפרטורה, עבודה, אנרגיה, המאופיינים על ידי ערך מספרי חיובי או שלילי, המלווה ביחידת מדידה.
- גדלים וקטוריים, לדוגמה: מהירות, תאוצה, כוח, תנע, ורכיביהם המאופיינים על ידי ערך מספרי המלווה ביחידת מדידה (גודל) ובנוסף לכך על ידי כיוון.
  נהוג לתאר גודל פיזיקלי וקטורי באמצעות וקטור, המייצג אותו גודל פיזיקלי. במקרה זה משרטטים את הווקטור לפי קנה מידה, כך שווקטור באורך מסוים מתאים לערך מסוים של הגודל הפיזיקלי.

לאור ההבחנה בין גדלים פיזיקליים סקלריים לבין גדלים פיזיקליים וקטוריים, הפעולות המתמטיות מתבצעות בהתאם:

- גדלים סקלריים יש לחבר ולחסר בצורה אלגברית.
- גדלים וקטוריים יש לחבר ולחסר לפי כללי החיבור והחיסור של וקטורים.

וקטור המתקבל כסכום של כמה וקטורים, המייצגים גודל פיזיקלי וקטורי, מכונה בפיזיקה וקטור שקול. פעולת חיבור וקטורי נדרשת לדוגמה לקבלת העתק כולל כסכום העתקים חלקיים.

וקטור המתקבל כהפרש של שני וקטורים, המייצגים גודל פיזיקלי וקטורי עבור גוף מסוים בשני רגעים שונים t_1 ו- t_2, מכונה וקטור שינוי. חיסור וקטורי כזה נדרש לקבלת:

- וקטור העתק, כשינוי וקטור המקום $\Delta\vec{r}_{1\to2}=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$
- וקטור שינוי המהירות $\Delta\vec{v}_{1\to2}=\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)$

ההפרש של שני וקטורים, המייצגים גודל פיזיקלי וקטורי עבור שני גופים שונים A ו- B ברגע מסוים, מוביל לגודל פיזיקלי יחסי. חיסור וקטורי כזה נדרש לקבלת:

- וקטור מיקום יחסי, כהפרש בין וקטורי המקום $\vec{r}_{A,B}=\vec{r}_A-\vec{r}_B$
- וקטור מהירות יחסית, כהפרש בין וקטורי המהירות $\vec{v}_{A,B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$

3. תרגילים

3.1 פרופורציות

1. נתונה הפרופורציה $\frac{m}{n}=\frac{p}{s}$.

א. בטא את כל אחד מארבעת האיברים באמצעות שלושה האחרים.

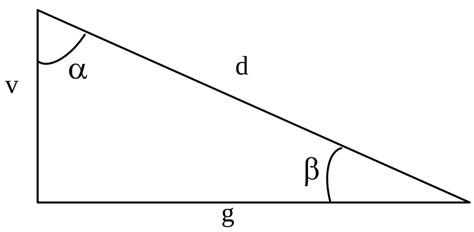
ב. נתון קטע שאורכו d, המחולק לשני חלקים – a ו- b. ידוע שהיחס בין אורך הקטע לבין אורך החלק הגדול שווה ליחס בין אורך החלק הגדול לבין אורך החלק הקטן.

(1) רשום פרופורציה המתאימה לתיאור זה.

(2) אורך הקטע 100 מטר. חשב את אורכם של שני החלקים.

3.2 גיאומטריה וטריגונומטריה במשולש

2. * נתון משולש ישר זווית:



מלא את הטבלאות הבאות שבהן p מסמן את היקף המשולש ו- A מסמן את שטחו.

	g (cm)	p (cm)	d (cm)	A (cm^2)	β (°)	v (cm)	α (°)
1			15		20		
2			17				55
3	20				17		
4	32					17	
5				40	37		
6				90			29
**7			50	600			

* למקרה 7 ישנן שתי אפשרויות.

p(cm)	$A(cm^2)$	$\tan\beta$	$\tan\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\alpha$	$\beta\ (^o)$	$(^o)\ \alpha$	d(cm)	v(cm)	g(cm)	
									28	18	1
							37	20			2
			1.8						15		3
					0.43			17			4
		2.21								7	5
	30							13			*6

* למקרה 6 ישנן שתי אפשרויות.

3. במשולש ישר זווית אחת הזוויות היא בת $36°$. אורכו של הניצב מול הזווית הנתונה הוא 4 ס"מ.
   א. שרטט תרשים מתאים לנתונים.
   ב. חשב את אורך הניצב השני ואת אורך היתר.

   מגדילים את הזווית הנתונה וגם את אורך הניצב מולה פי 2 .
   ג. חשב את האורכים החדשים של הניצב השני ושל היתר.
   ד. מהי המסקנה שנובעת מתוצאותיו של סעיף ג'?
   ה. כיצד ישתנו, אם בכלל, גדלי הזוויות במשולש אם נגדיל את האורכים של כל הצלעות פי שלושה? הסבר תשובתך.

4. * במשולש ABC אורך הניצב AC פי 1.4 מאורך הניצב BC.
   א. חשב את זוויות המשולש.
   ב. האם ניתן לחשב חד-משמעית את צלעות המשולש?

5. ** AC הוא מוט אנכי, שקצהו העליון בנקודה A. על ראש המוט נמצא מקל אנכי AD. הקו BC הוא קו אופקי שאורכו 150 מטר. מנקודה B רואים את הקצה העליון A של המוט בזווית גובה של $21°$, ואת הקצה העליון D של המקל בזווית גובה בת $25°$.
   א. שרטט תרשים המתאר את מבנה התרגיל וסמן בו את כל הנתונים.
   ב. חשב את גובה המקל AD. פרט חישוביך.
   ג. חשב בכמה ארוך קטע BD מן הקטע AB.
   ד. עקב רוח חזקה שנשבה זמן מה, נוטה המקל AD בזווית בת $10°$ ביחס לאנך, כך שנקודה A לא זזה והנקודה D מתרחקת מ- B. חשב את המרחק החדש בין נקודות C ו- D.

6. * נתונה פרופורציה $\frac{c}{a}=\frac{p}{q}$ מחליפים את a ב- $\sin\alpha$ ואת q ב- $\sin\beta$.

א. אילו תנאים צריכים להתקיים על מנת שהביטוי החדש יהיה נכון?

ב. בהנחה שהתנאים שהצגת בסעיף א מתקיימים, בטא את $\sin\beta$ באמצעות α , c , ו- p.

ג. נתונים $c=2p$ ו- $\alpha=30^\circ$. חשב את הזווית β.

ד. בהנחה ש- $\alpha=2\beta$ ו- $c=2p$, האם יתכן שהביטוי שמתקבל בעקבות ההחלפה המתוארת בשאלה הוא נכון?

3.3 וקטורים

7. * נתון וקטור $\vec{B}$ אשר גודלו 30 יחידות אורך וכיוונו יוצר 45 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר x, ברביע הראשון.

א. בנה מערכת צירים קרטזית ושרטט באופן איכותי את הווקטור הנ"ל, כך שיתחיל בראשית הצירים.

ב. הוסף בצבע אחר את היטליו של הווקטור $\vec{B}$ על הצירים.

ג. חשב את אורכי ההיטלים וציין את סימנו של כל אחד מהם (חיובי או שלילי).

ד. הוסף באותה מערכת צירים שני וקטורים, כך שלאחד הווקטורים ההיטל על ציר x יהיה שווה לאפס, ולווקטור השני – ההיטל על ציר y שווה לאפס. רשום מהו התנאי לכך שהיטל של וקטור על ציר יהיה שווה לאפס.

ה. כיצד ישתנו תשובותיך לסעיף ג' אם נעביר את נקודת ההתחלה של הווקטור $\vec{B}$ מראשית הצירים לנקודה (4,-3)? הסבר.

8. בטבלה הבאה נתונים השיעורים של נקודת ההתחלה ונקודת הסוף של ארבעה וקטורים:

	נקודת התחלה	נקודת סוף
וקטור I	(3 ,5)	(1 ,-1)
וקטור II	(2 ,-8)	(-1 ,-6)
וקטור III	(3 ,-7)	(3 ,2)
וקטור IV	(0 ,-8)	(1 ,1)

א. שרטט את ארבעת הווקטורים במערכת צירים משותפת.

ב. חשב את רכיביו של כל וקטור.

ג. חשב את גודלו וכיוונו של כל אחד מארבעת הווקטורים.

ד. חשב את הווקטור השקול (גודל וכיוון).

9. ידוע שהרכיב על ציר x של וקטור $\vec{D}$ שווה ל- (3.5-) יחידות אורך ורכיבו על ציר y שווה ל- (6.3-) יחידות אורך.

א. שרטט במערכת צירים קרטזית את שני הרכיבים, החל מראשית הצירים, ואת הווקטור השקול (השווה לסכום הווקטורי של הרכיבים). פרט את צעדיך.

ב. חשב את גודלו ואת כיוונו של הווקטור השקול והסבר מדוע בעצם הווקטור השקול הוא $\vec{D}$.

ג. איזה וקטור $\vec{E}$ (גודל וכיוון) יש להוסיף לווקטור $\vec{D}$, כדי שתוצאת החיבור $\vec{E}+\vec{D}$ תשתווה לאפס? נמק.

ד. ציין במה דומים ובמה שונים כלל המשולש וכלל המקבילית לחיבור וקטורים. לווה את הסבריך בדוגמאות מתאימות.

ה. על מנת לחסר וקטור אחד ממשנהו, האם ניתן לבצע פעולת חיבור שתוביל לאותה תוצאה? לווה את נימוקיך בדוגמה מתאימה.

10. * נער יצא מנקודה נתונה והלך 3 ק"מ מזרחה. לאחר מכן הלך עוד 5 ק"מ בזווית 30° צפונה מהמזרח. בסיום הקטע השני הוא נע עוד 4 ק"מ צפונה ולבסוף עבר 6 ק"מ נוספים בזווית 60° צפונה מהמערב.

א. שרטט את מסלול תנועתו של הנער, וסמן באותיות את נקודות המעבר בין הקטעים ובחצים - את כיווני התנועה בקטעים השונים. הוסף לשרטוט מערכת צירים, כך שציר x יהיה מכוון מזרחה וציר y - צפונה.

ב. חשב את ההעתק הכולל של הנער בכל ציר בנפרד.

ג. בהנחה שהנער השלים כל קטע תוך שעה וחצי, חשב את המהירות הממוצעת שלו (גודל וכיוון) בכל קטע.

ד. חשב את ההעתק הכולל (גודל וכיוון) שעבר הנער.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הנער לאורך הדרך כולה.

ו. איזה העתק (גודל וכיוון) על הנער להוסיף, כדי שיחזור לנקודת ההתחלה? למה שווה ההעתק הכולל במקרה זה?

11. * גוף מתחיל לנוע מנקודה O לנקודה A ועובר 30m בכיוון 45° צפונה מהמזרח. לאחר מכן הוא עובר לנקודה B הנמצאת 12m דרומה מ- A. בהמשך הוא נע בכיוון 15° צפונה מהמערב ועובר 25m עד לנקודה C. לבסוף עובר הגוף מרחק של 40m בכיוון 40° מערבה מהדרום עד לנקודה D.

פתור את הסעיפים הבאים בשתי דרכים: (1) בדרך גיאומטרית; (2) בדרך אלגברית.

א. חשב את ההעתק הכולל $\overrightarrow{OD}$ של הגוף (גודל וכיוון).

ב. איזה העתק (גודל וכיוון) להוסיף לתנועת הגוף, כדי שהעתק הסופי שלו ישתווה לאפס?

ג. איזה העתק $\overrightarrow{DE}$ בגודל מינימלי יש להוסיף אחרי D כך שהווקטור $\overrightarrow{AE}$ יהיה בכיוון צפון-דרום?

12. * כאשר גוף נע במסלול שאינו קו ישר, ניתן לסמן את המהירות הרגעית שלו באמצעות וקטור המשיק למסלול בנקודה הנדרשת אשר כיוונו הוא בהתאם למגמת התנועה. גודלו של הווקטור מאפיין את גודל המהירות באותו רגע בנקודה הנתונה.

א. צייר במחברתך מסלול שאינו קו ישר וסמן עליו את מקומות הימצאותו של הגוף בכמה רגעים עוקבים.

ב. בהנחה שמרווחי הזמן בין כל שתי נקודות עוקבות שציירת הינם שווים (כמו בתצלום סטרובוסקופי), סמן בשלוש מהנקודות העוקבות שסימנת בסעיף א' (נקרא להן A, B, C) את וקטורי המהירות הרגעית (יש לקחת בחשבון הן את מגמת התנועה והן את גודל המהירות). פרט צעדיך.

ג. מצא בתרשים את וקטור השינוי במהירות בין שתי הנקודה A ו- B שבחרת, באמצעות חיסור וקטורים בדרך גיאומטרית. פרט את פעולותיך.

ד. מצא את וקטור השינוי במהירות בין הנקודה B ו- C שבחרת, על ידי חיסור וקטורים. פרט את צעדיך.

ה. לאיזה וקטור אחר יש אותו כיוון כמו לווקטור "השינוי במהירות"? הסבר ונמק את תשובותיך.

13. נתונים ארבעה וקטורים המתחילים כולם בנקודה אחת, שהיא גם ראשית הצירים של מערכת קרטזית. להלן הקואורדינטות של נקודות הקצה של ארבעת הווקטורים:

A (0,6) , B (-3,-5) , C (2,8) , D (-4,0) .

א. שׂרטט במערכת צירים את ארבעת הווקטורים הנתונים.

ב. פרק לרכיביו הקרטזיים כל וקטור שאינו נמצא על אחד הצירים. סמן את הרכיבים בצבע אחר וחשב את גודלו של כל אחד מן הרכיבים.

ג. חשב את רכיבי הווקטור $\vec{E}$ - השקול לארבעת הווקטורים הנתונים, בכל ציר בנפרד .

ד. מהו הווקטור השקול (גודל וכיוון) של ארבעת הווקטורים הנתונים? חשב והסבר מהי המשמעות של הביטוי "וקטור שקול".

ה. איזה וקטור (גודל וכיוון) יש להוסיף לארבעת הווקטורים המקוריים, כדי שהשקול של כל חמשת הווקטורים יתאפס?

14. * נתונים שני וקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CD}$. הווקטורים נבנים בין הנקודות : A(3,1), B(3,5) ו- C(8,2) , D(2,4) בהתאמה.

א. שׂרטט את שני הווקטורים במערכת צירים קרטזית.

ב. מהן הקואורדינטות החדשות של נקודות הסוף 'B ו- 'D, אם מעתיקים את הווקטורים לראשית הצירים?

ג. שׂרטט את הווקטורים אשר מתחילים בראשית הצירים ומצא את הפרשם $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ (גודל וכיוון):
(1) בדרך אלגברית; (2) בדרך גיאומטרית (לפי שיטת המשולש).

ד. שׂרטט במערכת צירים חדשה את הווקטור $-\overrightarrow{CD}$ וחבר אותו לווקטור $\overrightarrow{AB}$. מהי המסקנה המתבקשת מהתשובה שהתקבלה?

15. ** נהר זורם מערבה ועליו שטה רפסודה שרוחבה 100 מטר - בכיוון הזרימה. אחד העובדים הולך על הרפסודה מדופן אחת שלה ועד לדופן השנייה בכיוון דרום. בזמן הליכתו מספיקה הרפסודה לעבור מרחק של 240 מטר ביחס לגדת הנהר.

א. שׂרטט תרשים של מה שמתרחש מנקודת מבטו של צופה העומד על הגדה וסמן בו את כל הנתונים, כולל המיקום ההתחלתי והסופי של העובד, וכן מיקומו הסופי של העובד אילו לא היה נע על הרפסודה.

ב. חשב את ההעתק של העובד ביחס לגדה (גודל וכיוון).

העובד מרכיב על הרפסודה מנוע שמקנה לה מהירות של 36 קמ"ש ביחס למים. מהירות הזרימה של מי הנהר היא 18 קמ"ש יחסית לגדה.

ג. חשב את מהירות הרפסודה ביחס לגדה (גודל וכיוון) בכל אחד מהמקרים הבאים:

(i) הרפסודה שטה עם כיוון הזרימה.

(ii) הרפסודה שטה נגד כיוון הזרימה.

(iii) ביחס למים הרפסודה שטה בניצב לגדה.

ד. אילו העובד היה צריך להביא את הרפסודה לנקודה הנמצאת בדיוק מול נקודת המוצא על הגדה הנגדית, באיזו זווית עליו לכוון את הרפסודה הממונעת ביחס למים, אם בהתחלה הרפסודה הייתה בצמוד לגדה הדרומית? הסבר תשובתך.

16. ** ציפור עפה במהירות של 90km/h ביחס לאוויר (כלומר ללא רוח הציפור הייתה מתקדמת ב- 90km/h יחסית לקרקע). נתון כי מהירות הרוח היא 20km/h מערבה.

א. באיזו זווית צריכה הציפור לפנות ביחס לכיוון הרוח, כדי שתעוף בדיוק דרומה?

ב. במשך כמה זמן תשלים הציפור מרחק של 80km ביחס לקרקע בתנאים אלה?

ג. באיזו זווית צריכה הציפור לפנות ביחס לכיוון הרוח, על מנת שתעוף צפון-מערבה?

ד. תוך כמה זמן תעבור הציפור מרחק של 80km ביחס לקרקע בתנאי של סעיף ג'?

ה. האם יתכן מצב שבו מהירות הציפור ביחס לקרקע תשתווה לאפס? נמק תשובותיך.

תשובות לתרגילים

1. ב(2) 38.2m , 61.8m
3. ב. 5.5cm , 6.8cm
   ג. 2.6cm , 8.41cm
4. א. 54.5^o , 35.3^o
   ב. לא, כי ...
5. ב. 12.37m
   ג. 4.83m
   ד. 69.8m
6. ג. 14.5°~
   ד. לא, כי...
7. ג. 21.21 , 21.21
8. ג. (I) 6.32 , 71.57° עם הציר x ברביע השלישי
   (II) 3.61 , 33.7° עם הציר x-
   (III) 9 , 0° עם הציר y+
   (IV) 9.06 , 83.7 ° עם הציר y+
9. ב. 7.21 , 60.95° ביחס ל x– ברביע ...
10. ב. 11.7km , 4.33km
    ד. 12.48km ב- 69.7° בכיוון ...
    ה. 2.08km/h בכיוון .....
11. א. 32.31m , 27.58° ביחס ל x– ברביע ...
    ג. 49.86m מזרחה
13. ג. (-5,9)
    ד. 10.3 , 60.95° עם x– ברביע השני
14. ב. B'(0,4) , D'(-6,2)
    ג. 6.32 , 18.43° ביחס ל x+ ברביע הרביעי
15. ב. 260m , 22.62^o
    ג. (i) 54km/h עם כיוון הזרימה
    (ii) 18km/h נגד כיוון הזרימה
    (iii) 40.25km/h ב- 63.4° צפונה מהמערב
    ד. 30° מזרחה מהצפון
16. א. +102.8°
    ב. 0.91h
    ג. -54.04°
    ד. 0.78h

פרק ג – כוחות ומצבי התמדה

מושגים מתמטיים - מערכת משוואות אלגבריות, פעולות עם שברים, סכום והפרש, אי-שיוויונים, רדיוס במעגל והמשיק המתאים, שימוש במחשבון כיס לחישובים טריגונומטריים.

קשר לעולם הפיזיקה – סכום כוחות, משמעות פיזיקלית של פתרון , בחירה אופטימלית של מערכת צירים, מעבר ממשוואה וקטורית אחת למערכת של שתי משוואות סקלריות.

1. נושאים מתמטיים

1.1 שברים רגילים

- שבר רגיל נכתב בצורה $\frac{a}{b}$ או a/b והוא מבטא את היחס בין שני הגדלים a ו- b.
- הגודל a נקרא מונה השבר והגודל b ($b \neq 0$) נקרא מכנה השבר.
- ערך השבר הוא תוצאת החילוק של a ב- b.
- אם המונה קטן מהמכנה, ערך השבר קטן מ- 1 והוא מכונה "שבר פשוט".
- אם המונה גדול מהמכנה, ערך השבר גדול מ- 1 והוא מכונה "שבר מדומה".
- ניתן להפוך שבר מדומה לשבר מעורב, המורכב ממספר שלם ושבר פשוט.
- תוצאה של המכפלה בין מספר כלשהו לבין שבר מדומה גדולה מהמספר המקורי; תוצאה של המכפלה בין מספר לבין שבר פשוט קטנה מהמספר המקורי.
- ערך השבר אינו משתנה אם מכפילים או מחלקים גם את המונה וגם את המכנה באותו מספר (השונה מאפס). פעולות אלו מכונות "הרחבה" ו"צמצום" בהתאמה.
- ניתן להתייחס למכנה כמספר החלקים השווים בהם חולק שלם ולמונה כמספר חלקים כאלה שנלקחו.
- על מנת לחבר או לחסר בין שני שברים יש להביא אותם למצב שיש להם אותו מכנה (מכנה משותף) על ידי הרחבה או צמצום מתאימים.
- אפשר להכפיל בין שני שברים שאינם מעורבים על ידי הכפלת שני המונים אחד בשני ושני המכנים אחד בשני.
- לשם פשטות החישובים עם שברים רגילים, מומלץ לבצע כל הצמצומים האפשריים טרם ביצע הפעולות הנדרשות.

קודם כל מצמצמים
ואחר כך מחשבים!

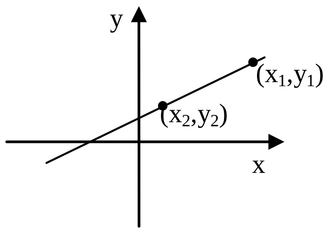
1.2 <u>פונקציה קווית (לינארית)</u> - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

- תיאור אנליטי – פונקציה ממעלה ראשונה $y = mx + n$.
- תיאור גרפי – קו ישר במערכת צירים קרטזית.

m מתאר את שיפוע הקו הישר = מקדם המשתנה הבלתי תלוי.

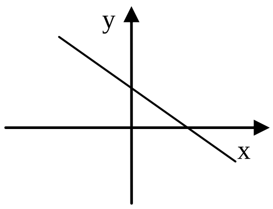
n מתאר את נקודת החיתוך עם הציר האנכי = האיבר החופשי של הפונקציה.

- אם השיפוע חיובי הישר עולה (תרשים 1) ואם הוא שלילי הישר יורד (תרשים 2).



$m>0$

תרשים 1 - ישר עולה



$m<0$

תרשים 2 - ישר יורד

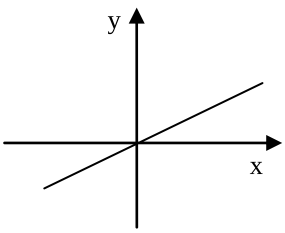
- חישוב שיפועו של הישר העובר דרך שתי נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- משוואת הישר העובר דרך שתי נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- כאשר האיבר החופשי n מתאפס, הגרף עובר דרך ראשית הצירים - תרשים 3. במקרה כזה אומרים ש- y נמצא <u>ביחס ישר</u> ל- x; למשל, אם x גדל פי N, זה יגרום ל-y לגדול פי N גם כן. חשוב לציין שיחס ישר הוא <u>מקרה פרטי</u> של תלות לינארית.



$n=0$

תרשים 3 - יחס ישר

- יש להבדיל בין הניסוח "ערך אחד גדול\קטן <u>פי</u> N מערך אחר" לבין הניסוח "ערך אחד גדול\קטן <u>ב-</u> N מערך אחר". בניסוח הראשון N מבטא את <u>היחס</u> בין שני הערכים (ורק במקרה זה יש יחס ישר בין שני הערכים), ובניסוח השני N מבטא את <u>ההפרש</u> בין שני הערכים.

- על מנת לשרטט גרף של פונקציה קווית מספיקות שתי נקודות במערכת הצירים. אם $n=0$ נקודה אחת היא ראשית הצירים וזקוקים לעוד נקודה אחת בלבד. אם $n \neq 0$, נוח לשרטט את הגרף בעזרת נקודות החיתוך שלו עם הצירים.

1.3 <u>מערכת משוואות אלגבריות ממעלה ראשונה</u>

נתייחס קודם למקרה הפרטי של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה עם שני נעלמים.

- לכל משוואה ממעלה ראשונה עם שני נעלמים, מתאים תיאור גרפי על ידי קו ישר במערכת צירים קרטזית.
- אם שני הישרים נחתכים בנקודה אחת, אזי למערכת המשוואות יש פתרון יחיד שהוא זוג הקואורדינטות של אותה נקודת חיתוך.

לגבי מערכות משוואות ממעלה ראשונה עם יותר משני נעלמים:

- ניתן להגיע בדרך אלגברית לפתרון יחיד של המערכת רק אם מספר הנעלמים שווה למספר המשוואות (הבלתי תלויות, שהן אינן תוצאה של חיבור או חיסור בין משוואות אחרות).
- פתרון המערכת הוא קבוצת ערכים מספריים עבור הנעלמים. הצבת ערכים אלה בכל אחת מהמשוואות הופכת אותה לפסוק אמת.
- על מנת לפתור את המערכת יש להקטין בהדרגה את מספר המשוואות, על ידי שימוש בשיטת ההצבה או בשיטת השוואת המקדמים.
- בכל משוואה אגורה אינפורמציה מסוימת. אם מבצעים פעולות בין משוואות של מערכת וכך מקבלים משוואה חדשה, משוואה זאת אינה נושאת אינפורמציה חדשה.

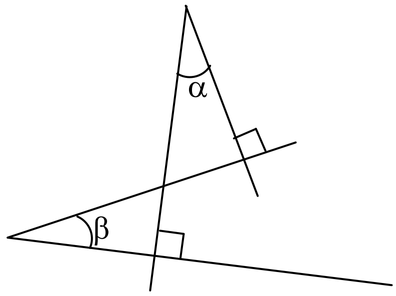
1.4 <u>אי- שוויונים</u>

- לכל אי-שוויון שני אגפים שערכם שונה.
- אי-שוויון נוצר משני מספרים או שני ביטויים הקשורים בסימנים $<$, $>$, $\geq$ או $\leq$.
- אם שני אגפי אי-שוויון מוכפלים (או מחולקים) באותו מספר <u>חיובי</u>, אזי מתקבל אי-שוויון חדש הזהה בסימן לאי-השוויון המקורי.
- אם שני אגפי אי-שוויון מוכפלים (או מחולקים) באותו מספר <u>שלילי</u>, אזי מתקבל אי-שוויון חדש הנגדי בסימן לאי-השוויון המקורי.
- מספר המקיים את אי-השוויון נקרא פתרון של אי-השוויון.
- הפתרון של אי-שוויון ניתן לבטא באמצעות הסימנים הבאים: $<$, $>$, $\geq$ או $\leq$ אשר מקשרים בין המשתנה לבין ערך מספרי. הערך המספרי נקרא חסם\גבול עליון או תחתון, לפי הסימנים $\leq$ או $\geq$ בהתאמה. לדוגמה עם הפתרון הוא $x \leq 8$, אזי 8 מכונה <u>חסם\גבול עליון</u> ומבינים ש x יכול להיות <u>לכל היותר</u> שווה ל- 8 , כלומר 8 הוא הערך המרבי (מקסימלי) של x. לעומת זאת, אם הפתרון הוא $y \geq 8$,

אזי 8 מכונה <u>חסם\גבול תחתון</u> ומבינים ש y יכול להיות <u>לפחות</u> שווה ל- 8, כלומר 8 הוא הערך מזערי (מינימלי) של y.

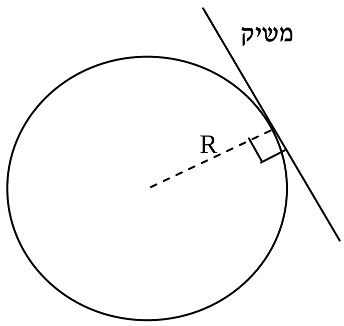
<u>1.5 גיאומטריה</u>

- שתי זוויות אשר צלעותיהן מאונכות זו לזו בהתאמה, שוות זו לזו (תרשים 4).



תרשים 4 - זוויות שצלעותיהן מאונכות זו לזו $\alpha=\beta$

- <u>משיק</u> למעגל הוא קו ישר הנוגע במעגל בנקודה אחת בלבד (תרשים 5) .
- בכל נקודה על פני מעגל הרדיוס והמשיק מאונכים זה לזה (תרשים 5).
- המעגל והמשיק נמצאים במישור אחד.

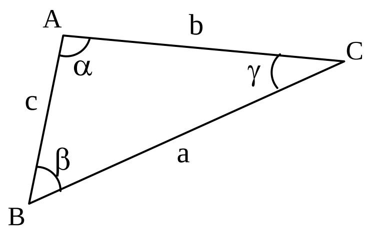


תרשים 5 - רדיוס ומשיק במעגל

<u>1.6 טריגונומטריה</u>

- שימוש במחשבון כיס לחישובים טריגונומטריים - אופן המעבר מזווית לפונקציה טריגונומטרית (סינוס, קוסינוס או טנגנס) או להיפך מתוארים בתרשים הבא:

- בכל משולש (תרשים 6) מתקיימים שני משפטים המקשרים בין הצלעות לזוויות.



תרשים 6 - משולש כללי

- משפט הקוסינוסים המתואר עבור הזווית α על ידי הביטוי:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

הערה: אם $\alpha = 90^\circ$ מתקבל משפט פיתגורס.

- משפט הסינוסים – היחס בין אורך הצלע לבין סינוס הזווית מולה הוא קבוע:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

2. <u>התאמת נושאים המתמטיים לעולם הפיזיקה</u>

- כאשר הסמל המתמטי Σ , המקובל עבור סכום, מתייחס לכוחות, הוא מסמן את <u>הכוח השקול</u>, שהוא הסכום הווקטורי של כל הכוחות הפועלים על גוף או על מערכת גופים.
- אחרי שמתקבל פתרון (מספרי או פרמטרי) בעל משמעות מתמטית, יש לבצע צעד נוסף – לבדוק האם פתרון זה הינו בעל משמעות פיזיקלית, במתחשב במצב הפיזיקלי הנתון.
- כאשר פתרון בעיה דורש בחירה של מערכת צירים קרטזית, הבחירה היא שרירותית והיא <u>אינה</u> משפיעה על המשמעות הפיזיקלית של התוצאות.
- בחירה אופטימלית של מערכת הצירים היא זאת שמאפשרת את הפתרון הנוח ביותר של הבעיה. זאת אומרת פרוק מספר מינימלי של כוחות לרכיבים קרטזיים.
- משוואה וקטורית אשר מייצגת חוק פיזיקלי, ניתנת לפתרון על ידי מעבר למערכת משוואות סקלריות, שמתקבלות כתוצאה מפרוק הווקטורים לרכיביהם הקרטזיים.

3. תרגילים

3.1 שברים רגילים

1. חשב את התוצאה שמתקבלת בתרגילים הבאים:

א. $\frac{5}{3}+\frac{4}{15}+\frac{2}{5}$

ב. $1\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}$

ג. $7\frac{1}{5}-2\frac{2}{7}+12\frac{7}{8}$

2. מצא את תחום ההגדרה של הביטויים הבאים ופשט אותם ככל האפשר:

א. $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$

ב. $\frac{x^2-16}{x+4}$

ג. $\frac{3x}{2}+\frac{2x}{3}$

ד. $\frac{2}{t-3}+\frac{3}{t+3}+\frac{t^2+9}{t^2-9}$

3. א. נתונים שני קפיצים זהים, כל אחד בעל קבוע הכוח 50N/m. מחברים את שני הקפיצים בטור (אחד אחרי השני). מהו קבוע הכוח השקול (האקוויוולנטי) של מערכת שני הקפיצים?

ב. מחברים בטור שלושה קפיצים זהים, שקבוע הכוח של כל אחד מהם k. מהו קבוע הכוח השקול של מערכת שלושה הקפיצים?

ג. מהו קבוע הכוח השקול של מערכת המורכבת מ- n קפיצים זהים המחוברים בטור, אם לכל אחד קבוע כוח k ?

ד. עתה מחברים בטור שלושה קפיצים שונים - $k_3=60\frac{N}{m}, k_2=30\frac{N}{m}, k_1=10\frac{N}{m}$. מהו קבוע הכוח האפקטיבי (השקול) של המערכת שהתקבלה?

ה. נתון קפיץ אחיד (הומוגני) בעל קבוע כוח 80N/m. גוזרים את הקפיץ לשני קפיצים שווי אורך. מהו קבוע הכוח של כל אחד מהקפיצים שהתקבלו?

3.2 פונקציה קווית

4. * תלמידה קיבלה משימה לבצע ניסוי המאמת את חוק הוק. היא בנתה מערכת מורכבת מסטטיב (כן), קפיץ, וו, משקולות זהות, סרגל ותפסן. התלמידה מדדה את התארכות הקפיץ Δl ואת משקל המשקולות התלויות. לפניך טבלה המרכזת את תוצאות הניסוי.

התארכות Δl (m)	משקל w (N)
0.042	1
0.079	2
0.121	3
0.158	4
0.202	5
0.239	6

א. צייר תרשים של המערכת, וסמן בו את כל הכוחות שפועלים על קבוצת המשקולות התלויה בקצה הקפיץ.

ב. שרטט דיאגרמת פיזור (נקודות) של המשקל המשקולות התלויות בקצה הקפיץ כפונקציה של התארכות הקפיץ הרצויה.

ג. איזו מגמה נראית לך המתאימה ביותר לחוקיות הגרף (ישרה, היפרבולית, מעגלית, פרבולית, אחרת)? הסבר תשובתך.

ד. (1) הוסף לדיאגרמת הפיזור קו מגמה, חשב את שיפועו ורשום את יחידות השיפוע.
(2) מהי המשמעות הפיזיקלית של שיפוע הגרף?

ה. חשב את התארכות הקפיץ כאשר תלויות על הקפיץ משקולות שמשקלן 4.5 ניוטון.

ו. מהו משקל המשקולות התלויות כאשר התארכות הקפיץ 0.25 מטר?

5. במעבדת פיזיקה בוצע ניסוי על-ידי אחד התלמידים. הוא חיבר קפיץ למתקן כך שהקפיץ נשאר אנכי בכל שלבי הניסוי וחיבר לקפיץ כל פעם מספר שונה של משקולות זהות. הוא הביא את המערכת למצב מנוחה ומדד במצב זה את אורך הקפיץ. התלמיד ריכז את תוצאות הניסוי בטבלה שלפניכם.

אורך הקפיץ	ℓ(cm)	11.9	14.1	15.8	18.2	20	21.9	24.1	26.1	27.9
מס' המשקולות	n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
הכוח הפועל על הקפיץ	F_{sp}(N)									

א. שרטט גרף (כלומר דיאגרמת פיזור וקו המגמה המתאים) של אורך הקפיץ כפונקציה של מספר המשקולות.

ב. חשב את שיפוע הגרף ורשום את יחידותיו.

ג. מהי המשמעות הפיזיקלית של שיפוע שחישבת בסעיף ב'?

ד. משקלה של כל משקולת הוא 0.185N. חשב עבור כל מקרה את הכוח הפועל על הקפיץ ומלא את השורה הריקה בטבלה הנ"ל. הסבר במילים מדוע הכוח שחישבת הוא אכן הכוח שפועל על הקפיץ.

ה. בנה גרף חדש המתאר את אורך הקפיץ כפונקציה של הכוח הפועל עליו.

ו. חשב בעזרת הגרף שבנית בסעיף ה' (אחרי שביצעת את הפעולות הנדרשות) את קבוע הקפיץ ורשום מהי המשמעות הפיזיקלית של המספר שקיבלת.

6. * לרשותו של מדען מספר רב של קפיצים זהים שקבוע הכוח של כל אחד מהם הוא $50\frac{N}{m}$.

א. המדען טוען שהקפיצים שלו הם אידאליים. מהי כוונתו?

ב. המדען תלה על קצה אחד הקפיצים, הנמצא במצב אנכי, גופים זהים בעלי משקל 1N כל אחד.

(1) מהי משמעות ההיגד "משקלו של גוף הינו 1N"?

(2) שרטט גרף של התארכות הקפיץ $\Delta\ell$ כפונקציה של המשקל הכולל w של הגופים התלויים עליו (בהנחה שבכל פעם שהמדען ביצע את המדידות, המערכת הייתה במנוחה). בחר לפחות שמונה נקודות לצורך זה. הסבר את צעדיך.

ג. הוסף באותה מערכת צירים גרף חדש עבור המצב שבו המדען מחבר שני קפיצים זהים בטור. הסבר.

ד. הוסף באותה מערכת צירים עוד גרף אחד עבור מערכת קפיצים חדשה, כאשר הפעם שני קפיצים מחוברים במקביל. נמק תשובתך.

ה. עתה המדען חותך את אחד הקפיצים שברשותו לשני חצאים ומבצע את הניסוי באמצעות אחד מהקפיצים התקבלו. הוסף במערכת הצירים בה מופיעים הגרפים הקודמים גרף חדש $\Delta\ell = f(w)$ עבור ניסוי זה.

ו. המדען חיבר את שני חציי הקפיץ מסעיף ה' במקביל. הוסף באותה מערכת צירים גרף $\Delta\ell = f(w)$ המתאים למצב זה.

ז. מהן המסקנות הנובעות מהגרפים שהתקבלו?

3.3 __מערכת משוואות אלגבריות ממעלה ראשונה__

7. פתור את המשוואות הבאות:

א. $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$

ב. $\frac{3(x-1)}{x+3} + \frac{x+7}{x-5} = 6$

ג. $\frac{x+6}{3x-4} = \frac{1}{3}$

ד. $\frac{5}{3x+2} - \frac{6}{(3x+2)(x+1)} = \frac{4}{2x+2}$

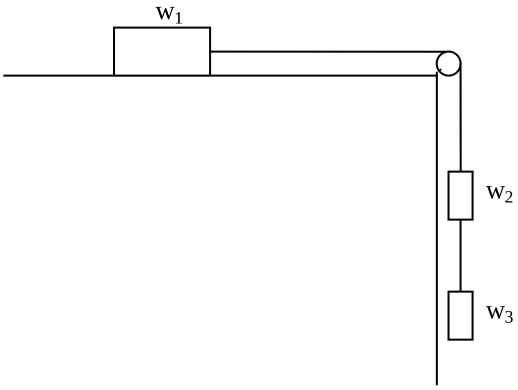
8. פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ y - 2x = 10 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y}{5} = -5 \\ y + 2x = 2 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{7}{x-y} + \frac{9}{x+y} = 14 \\ \frac{11}{x+y} - \frac{7}{x-y} = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y}{5} = -5 \\ y + 2x = 2 \end{cases}$



9. * המערכת שמופיעה בתרשים נעה במהירות קבועה.
החיכוך עם הגלגלת זניח והחוטים אידאליים.
נתונים משקלי הגופים:
$w_1 = 50N$, $w_2 = 20N$, $w_3 = 10N$

א. באיזה משני החוטים המתיחות גדולה יותר?
הסבר ללא חישוב.

ב. הגוף שמשקלו w_1 נע ימינה.
(1) כתוב את מערכת המשוואות שבעזרתה ניתן לחשב
את כוחות המתיחות בחוטים ואת מקדם החיכוך הקינטי בין הגוף w_1 למשטח האופקי.
(2) פתור את מערכת המשוואות שכתבת בסעיף (1).
(3) האם יש התאמה בין תשובותיך לסעיפים א ו- ב(2) ?

ג. באיזה כוח אופקי יש למשוך את הגוף שמשקלו w_1 שמאלה על מנת שהוא ינוע שמאלה במהירות קבועה ?

ד. האם במקרה שתואר בסעיף ג כוחות המתיחות בשני החוטים יגדלו, יקטנו או שיישארו ללא שינוי יחסית למקרה הקודם ? הסבר.

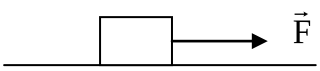
3.4 <u>אי-שוויונים</u>

10. פתור את האי-שוויונים הבאים:

א. $4x - 10 + 2x > -4x + 20$

ב. $3p + 3.5 - p \geq 6 - 0.5p - 2.5 + 3.5p$

ג. $\frac{s+1}{12} - \frac{s-1}{18} > \frac{s+2}{36}$



11. ** גוף שמשקלו 20N נמצא במנוחה על פני משטח אופקי מחוספס,
למרות שכוח אופקי $\vec{F}$ פועל עליו.

א. בהנחה שמקדם החיכוך הסטטי בין הגוף לבין המשטח הוא 0.6 , מהו תחום הערכים של גודל הכוח עבורם הגוף נמצא במנוחה?

ב. בהתאם לתשובתך לסעיף א, ציין מהם החסם/הגבול העליון והחסם/הגבול התחתון של גודל הכוח $\vec{F}$. הסבר תשובתך.

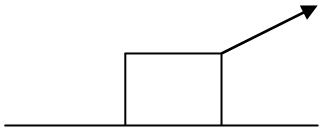
ג. בהנחה שגודל הכוח הפועל על הגוף שווה ל- 15N, מהו החסם/הגבול התחתון של מקדם החיכוך הסטטי שעבורו הגוף יישאר במנוחה? הסבר תשובתך.

12. גוף שמשקלו 50 ניוטון מחובר לחוט אנכי שכוח המתיחות בו יכול להיות לכל היותר 70 ניוטון (בכוחות גדולים יותר החוט נקרע).
א. מהו המשקל המרבי שאפשר להוסיף לגוף הנ"ל, כך שניתן יהיה להרים את מערכת הגופים שנוצרה במהירות קבועה מבלי שהחוט ייקרע?
ב. כיצד תשתנה, אם בכלל, תשובתך לסעיף א אם רוצים להוריד במהירות קבועה את מערכת הגופים שנוצרה באמצעות אותו חוט?

13. * תלמידה הכינה מספר תיבות מחומרים שונים וקרש וביצעה איתם כמה ניסויים.
א. התלמידה הניחה אחת הקופסאות על הקרש הנמצא על שולחן אופקי ולאחר מכן התחילה להרים אט-אט אחד מקצוות הקרש. אם מקדם החיכוך הסטטי בין התיבה לקרש הוא 0.35, מהי הזווית המרבית בה התיבה עדיין נשארת במנוחה על הקרש?
ב. התלמידה הציבה את הקרש בזווית 45^o והניחה על הקרש את התיבות, אחת אחרי השנייה. היא ראתה שחלק מהתיבות התחילו להחליק במורד הקרש והתיבות האחרות נשארו במנוחה. מהו התנאי עבור מקדם החיכוך הסטטי בין תיבה לקרש כדי שהתיבה תישאר במנוחה?
ג. בניסוי חדש התלמידה הניחה את הקרש בזווית 20^o יחסית לאופק והשתמשה בתיבה שמקדם חיכוך הסטטי בינה לבין הקרש הוא 0.3 ומסתה 1kg.
(1) מהו הכוח אותו יש להפעיל על התיבה במקביל לפני הקרש כדי שעל התיבה לא יפעל כלל כוח חיכוך?
(2) מהם החסם העליון והחסם התחתון של גודל הכוח שיש להפעיל על התיבה במקביל לקרש כלפי מעלה כדי למנוע את החלקתה? שימו לב! התיבה יכולה להתחיל את החלקתה במעלה הקרש או במורד הקרש.
(3) מהו הקשר בין התוצאות ל- (1) ו- (2)?

3.5 גיאומטריה וטריגונומטריה

14. על גוף נקודתי פועלים בו- זמנית ארבעה כוחות. האחד שגודלו 30N וכיוונו יוצר זווית בת 20^o עם כיוון החיובי של ציר x, השני בן 12N וכיוונו עם כיוון השלילי של ציר y, השלישי בן 7N וזווית בינו לבין כיוון החיובי של ציר x היא 105^o והאחרון הוא בעל גודל של 40N היוצר זווית בת -40^o עם כיוון השלילי של ציר x.
א. חשב את הכוח השקול שפועל על הגוף.
ב. איזה כוח (גודל וכיוון) יש להוסיף, כדי ששקול הכוחות שפועלים על הגוף ישתווה לאפס?
ג. איזה כוח מינימלי יש להוסיף למערכת, או לגרוע ממנה, כדי שהגוף ינוע לאורך ציר x?
ד. איזה כוח מינימלי יש להוסיף למערכת, או לגרוע ממנה, על מנת שהגוף ינוע לאורך ציר y?
ה. כאשר שקול הכוחות שפועלים על הגוף שווה לאפס, האם הגוף נע או נח? הסבר תשובותיך.



15. * גוף שמשקלו $50N$ נע בתנועה שוות מהירות על משטח אופקי מחוספס. כוח בן $28N$ פועל על הגוף בכיוון 17^o מעל לאופק, ימינה.

א. האם ייתכן שבתנאים הנתונים הגוף נע:

(1) ימינה? נמק ; (2) שמאלה? נמק.

ב. מצא בדרך גיאומטרית את הכוח שמופעל על הגוף על - ידי המשטח (גודל וכיוון).

ג. מצא את הרכיבים הקרטזיים של הכוח שחישבת בסעיף ב במערכת צירים הרגילה (אופקי- אנכי).

ד. מהי המשמעות הפיזיקלית של כל אחד מרכיבים אלה? הסבר תשובתך.

ה. מצא את מקדם החיכוך הקינטי בין הגוף למשטח.

16. א. הגדר את המושג "זווית".

ב. בנה זווית בת 50^o.

ג. בנה ישר מאונך לאחת הקרניים של הזווית.

ד. בצע את אותה פעולה לגבי הקרן השנייה של אותה זווית.

ה. מדוד את הזווית הקטנה בין שני האנכים שבנית.

ו. הסק מסקנה ונסח אותה במילים כמשפט.

17. * נתון מדרון שזווית שיפועו 40^o ועליו גוף קטן.

א. שרטט תרשים המצב הנתון במחברתך.

ב. הוסף לתרשים וקטורים המיצגים את משקל הגוף ואת הכוח הנורמלי הפועל עליו.

ג. לאיזה חלק של המדרון מאונך המשקל?

ד. לאיזה חלק של המדרון מאונך הכוח הנורמלי?

ה. מהי הזווית בין המשכו של הכוח הנורמלי בכיוון מנוגד לכיוון פעולתו לבין המשקל?

ו. מהי הזווית בין הכוח הנורמלי לבין המשקל?

18. ** גוף שמשקלו $50N$ יורד במורד מדרון ששיפועו 36.87^o במהירות קבועה.

א. צייר תרשים כוחות וחשב את מקדם החיכוך הקינטי בין הגוף לבין פני המדרון, בעזרת שתי בחירות שונות של מערכת צירים קרטזית:

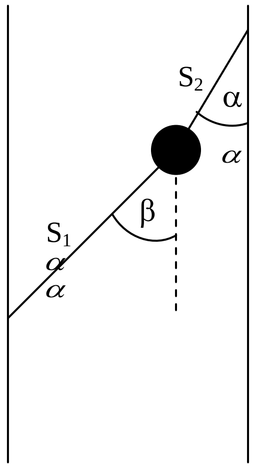
(1) כאשר אחד הצירים מקביל לפני המדרון.

(2) כאשר אחד הצירים הוא אופקי (מקביל לבסיס המדרון).

ב. מהי המסקנה הנובעת מהתוצאות שהתקבלו בסעיף א' (1) ו- (2) ?

ג. מהו הנתון המיותר לצורך פתרון סעיף א'? נמק.

ד. האם אפשר לגרום לגוף לעלות על המדרון במהירות קבועה? אם לא, הסבר מדוע. אם כן, רשום מה יש לעשות לשם כך.



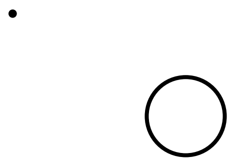
19. בשרטוט שלפניך מתוארת מערכת שבה כדור מוחזק על-ידי שני חוטים. המערכת נמצאת במנוחה. משקל הכדור הוא $65N$ ומשקל החוטים זניח. מתיחות החוט S_1 היא $124N$ והזווית β היא 38^o .

מצא את הזווית α ואת מתיחות החוט S_2 .

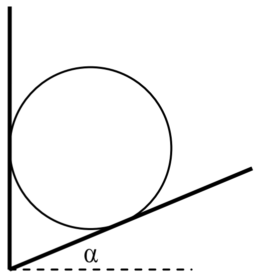
פתור בשתי דרכים:

(1) בדרך גיאומטרית (בעזרת משפט קוסינוס).

(2) בדרך אלגברית (בעזרת רכיבים קרטזיים).



20. * נקודה מרוחקת 30 ס״מ ממרכזו של כדור שקוטרו 10 ס״מ. מצא את הזווית שנוצרת בין שני הישרים המשיקים לכדור והעוברים דרך הנקודה הנתונה.



21. ** כדור שמשקלו w לכוד בין שני קירות, האחד אנכי והשני נטוי בזווית α מעל הכיוון האופקי (ראה שרטוט).

א. שרטט את כל הכוחות הפועלים על הכדור.

ב. דרך איזו נקודה מיוחדת של הכדור צריכים לעבור וקטורי הכוחות הנורמליים?

ג. שרטט את הכוח שמפעיל הכדור על הקיר <u>הנטוי</u> ופרק אותו לרכיביו הקרטזיים.

ד. הבע את הכוח ששרטטת בסעיף ג' באמצעות w, ו- α .

ה. הבע את הכוח שמפעיל הכדור על הקיר <u>האנכי</u> באמצעות w, ו- α .

תשובות לתרגילים

1. א. $2\frac{1}{3}$
   ב. 4
   ג. $17\frac{221}{280}$
2. א. $x \neq 1$, $x-1$
   ב. x , $x - 4 \neq -4$
   ג. $\frac{13x}{6}$
   ד. $t \neq 3,-3$, $\frac{t+2}{t-3}$
3. א. $25\frac{N}{m}$
   ב. $\frac{k}{3}$
   ג. $\frac{k}{n}$
   ד. $6\frac{2}{3}N/m$
   ה. 160N/m
4. ד. (1) 25.15N/m
   (2) קבוע הקפיץ
   ה. 0.18m
   ו. 6.29N
5. ב. 1.05
   ו. 18.5N/m
7. א. 1.5 , 2/3
   ב. 9 , -7
   ג. אין פתרון
   ד. -5
8. א. -4 , y= 2
   ב. (-4,10)
   ג. $x = 1.2$, $y = -0.2$
9. ב. 0.6
   ג. 60N
10. א. $x>3$
    ב. $0 \le p$
    ג. כל הפתרונות
11. א. $0<12N \le F$
    ב. $0<12N \le F$
    ג. 0.75
12. א. 20N
13. א. 19.29^o
    ב. $\mu_s \ge 1$
    ג. (1) 3.42N
    (2) 6.24N ; 0.6N
14. א. 31.02N , 97.89^o
    ב. 31.02N , -97.89^o
    ג. 30.73N , בכיוון השלילי של ציר y
    ד. 4.26N, בכיוון החיובי של ציר x
15. ב. 49.65N , 122.63^o
    ג. $F_x = -26.77N$, $F_y = 41.81N$
    ה. 0.61
17. ה. 40^o
    ו. 140^o
18. א. 0.75
19. 179.73N , 25.14^o
20. 19.18^o
21. ד. $\frac{w}{\cos\alpha}$
    ה. $w \cdot \tan\alpha$

פרק ד – החוק השני של ניוטון

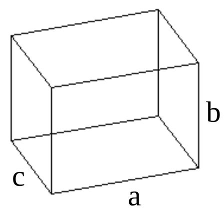
מושגים מתמטיים - נפחים, אי-שוויונים, רכיבים קרטזיים של וקטור, משוואה וקטורית ופיצולה למערכת משוואות אלגבריות.

קשר לעולם הפיזיקה –.כוח שקול, בחירה אופטימלית של מערכת צירים, משמעות פיזיקלית של פתרון , גוף נקודתי פיזיקלי.

1. נושאים מתמטיים

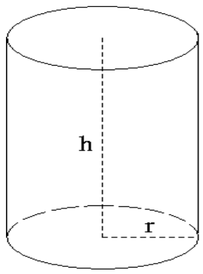
1.1 נפח

- נפח הוא גודל פיזיקלי המבטא את המקום במרחב שהגוף תופס.
- נהוג לסמן נפח באות V, מהמילה אנגלית volume.
- בתרשים 1 מופיעה תיבה ו- c, b, a הם אורכי מקצועותיה. נפח התיבה $V = a \cdot b \cdot c$



תרשים 1 - תיבה

- בתרשים 2 מופיע גליל. r הוא רדיוס הבסיס ו- h הוא הגובה. נפח הגליל הוא $V = \pi r^2 \cdot h$. הערה: πr^2 הוא שטח בסיס הגליל.



תרישם 2 - גליל

- בתרשים 3 מופיע כדור. r הוא רדיוס הכדור ו- d הוא הקוטר. נפח הכדור הוא: $V = \dfrac{4\pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot d^3}{6}$

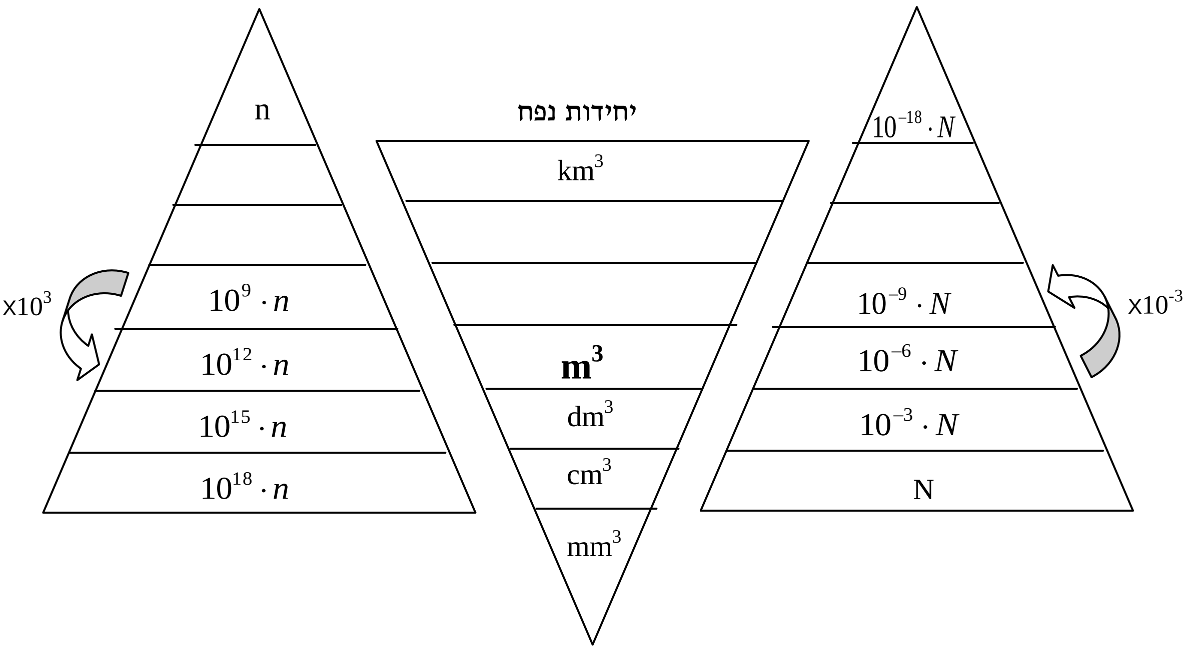
תרשים 3 - כדור

- יחידת המדידה של נפח היא חזקה 3 של יחידת המדידה של אורך, לדוגמה m^3 (מ"ק) שהוא היחידה הבסיסית (SI), cm^3 (סמ"ק), dm^3=liter.

- אפשר לבטא נפח נתון באמצעות יחידות מדידה שונות. ככל שהיחידה הנבחרת גדולה יותר, כך המספר המתאר את האורך קטן יותר.

מספר X **יחידה** = **מספר** X יחידה

בתרשים הבא מצוירים סולמות שמייצגים את הפעולות שיש לבצע על מנת להמיר מספר גדול N של מילימטרים מעוקבים או מספר קטן n של קילומטרים מעוקבים ליחידות נפח אחרות. כפי שמצוין על ידי החיצים, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מטה (מיחידה גדולה לקטנה) דורש הכפלת המספר ב- $1000=10^3$ ולעומת זאת, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מעלה (מיחידה קטנה לגדולה) דורש חילוק המספר ב- $1000=10^3$.



להזכירך, היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת נפח היא <u>מטר מעוקב (m^3 = מ"ק)</u>.

1.2 <u>אי- שוויונים</u>

- לכל אי-שוויון שני אגפים שערכם שונה.
- אי-שוויון נוצר משני מספרים או שני ביטוים הקשורים בסימנים < , > , ≥ או ≤ .
- אם שני אגפי אי-שוויון מוכפלים (או מחולקים) באותו מספר <u>חיובי</u>, אזי מתקבל אי-שוויון חדש הזהה בסימן לאי-השוויון המקורי.
- אם שני אגפי אי-שוויון מוכפלים (או מחולקים) באותו מספר <u>שלילי</u>, אזי מתקבל אי-שוויון חדש הנגדי בסימן לאי-השוויון המקורי.

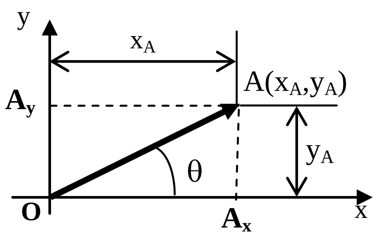
- מספר המקיים את אי-השוויון נקרא פתרון של אי-השוויון.
- הפתרון של אי-שוויון ניתן לבטא באמצעות הסימנים הבאים: $<$, $>$, $\leq$ או $\geq$ אשר מקשרים בין המשתנה לבין ערך מספרי. הערך המספרי נקרא חסם\גבול עליון או תחתון, לפי הסימנים $\leq$ או $\geq$ בהתאמה. לדוגמה: אם הפתרון הוא $x \leq 8$, אזי 8 מכונה <u>חסם\גבול עליון</u> ומבינים ש x יכול להיות <u>לכל היותר</u> שווה ל- 8 , כלומר 8 הוא הערך המרבי (מקסימלי) של x. לעומת זאת, אם הפתרון הוא $y \geq 8$, אזי 8 מכונה <u>חסם\גבול תחתון</u> ומבינים ש y יכול להיות <u>לפחות</u> שווה ל- 8, כלומר 8 הוא הערך המזערי (המינימלי) של y.
- אם שני האגפים שונים מאד זה מזה, נהוג להשתמש בסימנים "<<" ו- ">>" , הנקראים "גדול בהרבה" ו- "קטן בהרבה" בהתאמה.
- בחיבור וחיסור בין שני גדלים שאחד מהם קטן בהרבה מהשני, ניתן להזניח (להשמיט, להציב במקומו 0) את הקטן מהשניים.
- במנה של שני גדלים שאחד מהם קטן בהרבה מהשני, ישנן שתי אפשרויות:
  - כאשר הגודל הקטן מהווה את המונה, אזי המנה שואפת לאפס.
  - כאשר הגודל הקטן מהווה את מכנה, אזי המנה שואפת לאינסוף .
- במכפלה ובמנה אסור להשמיט (להציב במקומו 0) את הקטן מבין שני הגדלים.

1.3 <u>וקטורים</u> - הנושא הוצג בהרחבה בפרק ב

<u>הצגות של וקטור</u>

ניתן להציג וקטור בשתי דרכים:

א. <u>הצגה קרטזית (אלגברית)</u> – באמצעות שיעורי הקצה של הווקטור, כאשר התחלתו בראשית הצירים (תרשים 4).

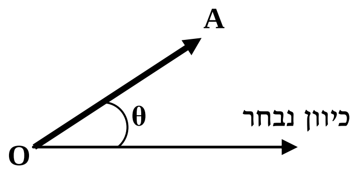


תרשים 4 - הצגה קרטזית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי שיעורי הקצה,** $\vec{OA} = (x_A, y_A)$

הערה: אם הווקטור לא מתחיל מראשית הצירים, הערכים הרשומים בתוך הסוגריים מייצגים את הרכיבים הקרטזיים שלו.

ב. <u>הצגה פולארית (או גיאומטרית)</u> – באמצעות גודל וכיוון יחסית לכיוון נבחר (תרשים 5).



תרשים 5 - הצגה פולארית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי גודלו וכיוונו,** (OA, θ) **, או** $(|\vec{OA}|, \theta)$

- מעברים בין שתי ההצגות (ראה גם תרשים 4) :

א. נתון הייצוג הפולארי (הגיאומטרי) (OA, θ) . חישוב הרכיבים הקרטזיים, מרכיביו של הייצוג הקרטזי:

$$OA_y = OA \cdot \sin\theta \quad , \quad OA_x = OA \cdot \cos\theta$$

ב. נתון הייצוג הקרטזי (האלגברי) (OA_x, OA_y). חישוב הגודל והכיוון, מרכיביו של הייצוג הפולארי:

גודל הווקטור - $$OA = \sqrt{OA_x^2 + OA_y^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

כיוון הווקטור - $$\tan\theta = \frac{OA_y}{OA_x} = \frac{y_A}{x_A}$$

הערה: במידה שהווקטור לא נמצא ברביע הראשון, מאפיינים את כיוונו בהתאם להמלצות – באמצעות זווית חדה יחסית לכיוון החיובי או השלילי של אחד הצירים.

<u>פעולות עם וקטורים בייצוג קרטזי (אלגברי)</u>

ניתן לבצע פעולות בווקטורים על ידי שימוש ברכיביהם הקרטזיים. לשם כך יש לבצע את הפעולות הבאות:

(1) שרטוט כל אחד מן הווקטורים הנתונים ופירוקם לרכיבים קרטזיים בתרשים,

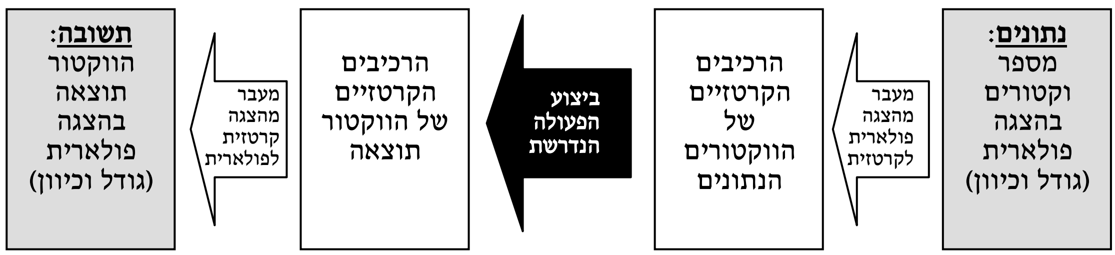
(2) חישוב הרכיבים הקרטזיים ששורטטו,

(3) חישוב הרכיבים הקרטזיים של וקטור התוצאה, על ידי ביצוע הפעולה הנדרשת בנפרד בכל ציר:

- חיבור - $$\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$$
- חיסור - $$\begin{cases} D_x = A_x - B_x \\ D_y = A_y - B_y \end{cases}$$
- כפל בסקלר - $$\begin{cases} B_x = mA_x \\ B_y = mA_y \end{cases}$$

(4) מציאת גודלו וכיוונו של וקטון התוצאה.

נסכם את השלבים השונים על ידי תרשים הזרימה הבא:



2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

- גוף נחשב נקודתי אם מימדיו זניחים. גוף כזה מתואר על ידי נקודה גיאומטרית ומיקומו מוגדר על ידי הקואורדינטות (שיעורים) של הנקודה.
- גוף נקודתי פיזיקלי הוא גוף שמימדיו זניחים (ביחס למרחקים המעורבים במצבים השונים), אך מסתו איננה זניחה.
- מותר לחבר או לחסר רק גדלים פיזיקליים זהים במהותם (למשל זמן עם זמן – חיבור\חיסור סקלרי, תאוצה עם תאוצה – חיבור\חיסור וקטורי).
- גדלים סקלריים או גדלים וקטוריים השונים מבחינה פיזיקלית (כגון כוח ומהירות או אורך ושטח) לא ניתנים לחיבור או חיסור.
- כאשר פתרון בעיה דורש בחירה של מערכת צירים קרטזית, לצורך פרוק וקטורים, הבחירה היא שרירותית והיא אינה משפיעה על המשמעות הפיזיקלית של התוצאות.
- בחירה אופטימלית של מערכת הצירים היא כך, שאחד הצירים הוא בכיוון וקטור התאוצה. בבחירה כזאת מתקיים מצב התמדה באחד הצירים, דבר שמקל על פתרון מערכת המשוואות.
- אם מערכת הצירים לא נבחרה לפי ההמלצה הנ"ל, חייבים לפרק גם את וקטור התאוצה לרכיבים קרטזיים.
- אחרי שמתקבל פתרון (מספרי או פרמטרי) בעל משמעות מתמטית, יש לבצע צעד נוסף – לבדוק האם פתרון זה הינו בעל <u>משמעות פיזיקלית</u>, לאור המצב הפיזיקלי הנתון.

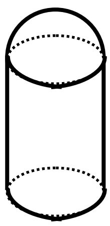
3. תרגילים

3.1 נפח וצפיפות

1. השלם את הטבלה הבאה. רשום את כל המספרים בכתב מדעי בלבד.

		סמ"ק		ממ"ק	
	m^3		km^3		dm^3
1				120	
2					52.7
3			0.08		
4	9.7				
5			2.04		
6		9			
7	25				
8					10.02

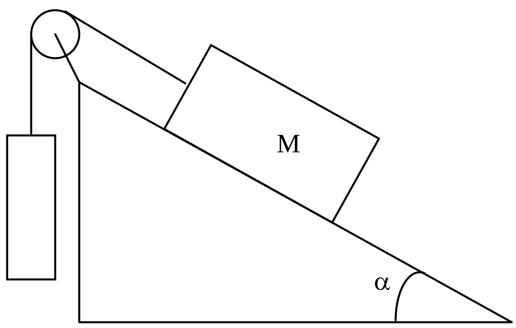
2. * גוף נוצר מגליל שעליו הודבק חצי כדור, כך שלשניהם בסיס משותף. רדיוס הכדור 4 ס"מ וגובה הגליל 80 מ"מ. כל אחד משני הגופים הינו הומוגני, כלומר עשוי מחומר אחיד.



א. מהו נפח הגוף, ביחידה m^3 ?

ב. צפיפות הגליל $2.8\frac{g}{cm^3}$ וצפיפותו של חצי הכדור $6200\frac{kg}{m^3}$. חשב את מסת הגוף.

3. ** בשרטוט מתוארת מערכת הכוללת שתי תיבות הקשורות בחוט שמסתו זניחה דרך גלגלת קבועה. מסת התיבה המונחת על המשטח היא M. מידות התיבה התלויה הם d , c , b וצפיפותה ρ. ניתן להזניח את כל כוחות החיכוך.



א. שרטט את תרשים הכוחות שפועלים על כל תיבה.

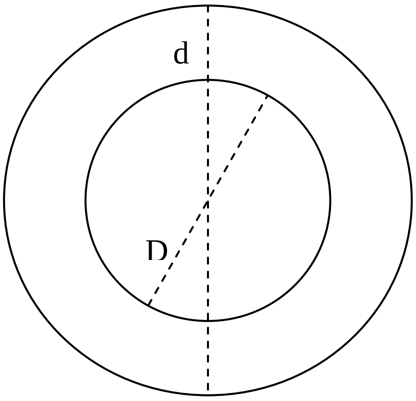
ב. הבע את תאוצת המערכת באמצעות α, M, g , b , c , d ו- ρ. שים לב - ישנן שתי אפשרויות!

ג. נתונים: $\rho = 1000kg/m^3$, $a = 4m/s^2$, $M = 3\frac{1}{3}kg$, $b = 25cm$, $c = 10cm$, $d = 20cm$.

מצא את הזווית α , אם ידוע שתאוצת הגוף בעל מסה M מכוונת במעלה המדרון.

ד. מהי משמעות המשפט: "צפיפות התיבה היא $1000\frac{kg}{m^3}$" ?

4. ** בשרטוט מתואר חתך רוחב של כוכב ללא אטמוספרה, שקוטרו d. העיגול הפנימי מייצג את ליבת הכוכב, שקוטרה D וצפיפותה גדולה פי 3 מצפיפות המעטפת. צפיפות המעטפת היא ρ.



א. בטא את מסת הכוכב באמצעות d, D ו - ρ .

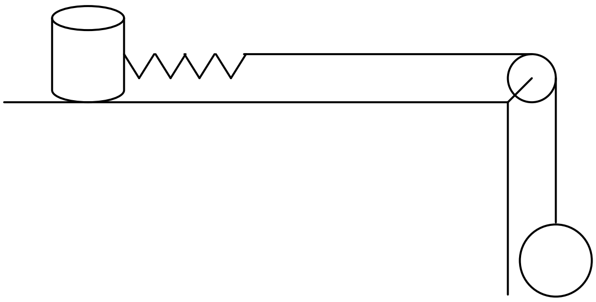
ב. ידוע כי d = 3D.

(1) בטא את מסת הכוכב באמצעות d ו- ρ .

(2) מצא את היחס בין מסת הליבה לבין מסת המעטפת.

ג. גודל הכוכב אינו משתנה, אבל יחסית למצב הנתון בסעיף ב' הליבה מתכווצת כך שרדיוסה קטֵן פי 2, והמעטפת מתפשטת פנימה. בתהליך זה הן מסת הליבה והן מסת המעטפת אינן משתנות. חשב את היחס בין צפיפות הליבה והמעטפת במצב החדש.

5. * בתרשים מופיע גליל עשוי מחומר שצפיפותו $7.8\frac{g}{cm^3}$ בעל גובה 10 ס"מ ורדיוס 50 מ"מ מחובר לקפיץ אידאלי שקבוע הכוח שלו $100\frac{N}{m}$. לקפיץ קשור חוט שכרוך סביב גלגלת ובקצהו השני תלוי כדור שרדיוסו 0.12 מ'. ניתן להזניח את כל כוחות החיכוך ואת מסות החוט והגלגלת. המערכת נעה בתאוצה $2\ m/s^2$.



א. האם ניתן לדעת מהו כיוון התאוצה ומהו כיוון המהירות של הכדור? אם לא – הסבר מדוע, אם כן – קבע את הכיוון.

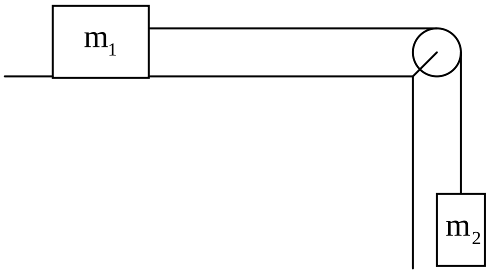
ב. חשב את התארכות הקפיץ.

ג. מהו היחס בין הכוח שהקפיץ מפעיל על הגליל לבין הכוח שהחוט מפעיל על הכדור?

ד. חשב את צפיפות החומר ממנו עשוי הכדור.

ה. בהנחה שהחיכוך בין הגליל לבין המשטח האופקי אינו ניתן להזנחה, ושמקדם החיכוך הקינטי הוא 0.35 , מהי הצפיפות הדרושה לכדור חדש בעל אותו רדיוס כדי שתאוצת המערכת לא תשתנה?

3.2 אי- שוויונים



6. נתונה המערכת שבתרשים. מניחים שהגופים לא פוגעים בגלגלת או ברצפה במהלך תנועתם ושכוחות החיכוך זניחים.

א. האם תאוצת המערכת תלויה במהירות ההתחלתית של הגופים? הסבר.

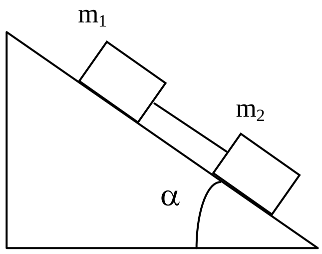
ב. האם תאוצת המערכת נשארת קבועה אם מסת החוט שניחה? הסבר.

ג. האם תאוצת המערכת נשארת קבועה אם מסת החוט איננה זניחה? הסבר.

ד. בהנחה שמסת החוט זניחה,

(1) בטא את תאוצת המערכת באמצעות m_1, m_2 ו- g.

(2) אם המסה m_1 קטנה בהרבה מהמסה m_2, לאיזה סוג של תנועה שואפת תנועת הגוף בעל מסה m_2? הסבר תשובתך.



7. ** שני גופים בעלי מסות m_1 ו- m_2 נמצאים על פני מדרון ששיפועו α. מקדם החיכוך הקינטי בין הגופים לבין המדרון הוא μ_k.

א. על הגוף שמסתו m_1 פועל כוח $\vec{F}$ מקביל לפני המדרון, הגורר את המערכת במעלה המדרון החל ממנוחה..

(1) סמן את כל הכוחות שפועלים על כל אחד מהגופים, ציין את כוחות התגובה לכוחות שסימנת ורשום איזה גוף מפעיל כל אחד מהכוחות.

(2) בטא את תאוצת המערכת באמצעות g, m_1 , m_2 , μ_k, α ו- F.

ב. במקרה אחר כוח $\vec{F}$ פועל על הגוף שמסתו m_2 במורד המדרון וגורר לכיוון זה את המערכת. בטא את תאוצת המערכת במקרה זה באמצעות אותם פרמטרים כמו בסעיף א (2).

ג. נתונים: $m_2 = 20\text{kg}$, $m_1 = 10\text{kg}$, $\mu_k = 0.4$, $\sin\alpha = 0.6$.

(1) מהם שני הערכים של גודל הכוח $\vec{F}$ שיש להפעיל על המערכת במקביל לפני המדרון כדי <u>שגודל</u> התאוצה ישתווה ל- $5\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$?

(2) באיזה תחום צריך להיות גודלו של כוח $\vec{F}$ שיש להפעיל על המערכת במקביל לפני המדרון, כדי שגודל התאוצה במורד המדרון יהיה קטן מ- $5\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$?

8. * נתון מדרון עם מנגנון המאפשר לשנות את שיפועו. מטילים גוף במעלה המדרון מספר פעמים. מקדם החיכוך הקינטי בין הגוף לבין המדרון הוא 0.3 והסטטי הוא 0.5.

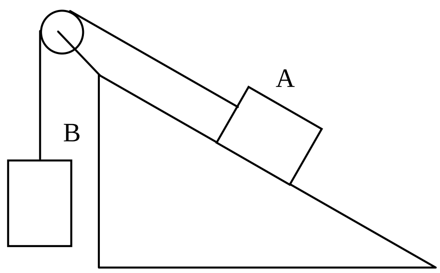
א. מהו התנאי לכך שהגוף יחזור לנקודת המוצא?

ב. מהו תחום הזוויות שעבורן הגוף יחזור לנקודה ממנה נזרק?

3.3 וקטורים ומערכות צירים

9. שרטט במחברתך (עם דפים משובצים) מערכת צירים קרטזית עם ציר x אופקי וציר y אנכי וכייל כל ציר כך ששתי משבצות בדף המחברת ייצגו יחידת אורך אחת. הוסף שלושה וקטורים:
$\vec{A}(-4,0)$, $\vec{B}(6,6)$, $\vec{C}(2,-7)$ המתחילים מראשית הצירים.
א. חשב את גודלו ואת כיוונו של הווקטור השקול בדרך אלגברית - בעזרת הרכיבים הקרטזיים במערכת הצירים ששרטטת.
ב. הוסף לשרטוטך הקודם, בצבע שונה, מערכת צירים קרטזית חדשה שהצירים שלה אינם מקבילים לצירים הקודמים. בהתייחס למערכת צירים חדשה זאת:
(1) שרטט, מדוד ורשום את הרכיבים של כל אחד משלושה הווקטורים.
(2) חשב את גודלו ואת כיוונו של הווקטור השקול בדרך אלגברית.
ג. מהו ההסבר לדומה ולשונה בתוצאות שקיבלת בסעיפים א ו- ב(2)?

10. * נתונים שני וקטורים שיוצרים זווית 120^o זה עם זה ולשניהם אותו גודל N. בטא באמצעות N את גודל הווקטור השקול וחשב את הזווית שהווקטור השקול יוצר עם כל אחד מהווקטורים הנתונים.
פתור בשתי דרכים:
א. בדרך גיאומטרית.
ב. בדרך אלגברית:
(1) בעזרת מערכת צירים שדורשת פרוק של וקטור אחד בלבד.
(2) בעזרת מערכת צירים שאחד מציריה בכיוון חוצה הזווית בין שני הווקטורים.
ג. על גוף פועלים שני כוחות אשר לשניהם אותו גודל F, והזווית בינם 60^o. בטא באמצעות F את גודל הכוח השקול וחשב את הזווית שהוא יוצר עם כל אחד מהכוחות הנתונים. בחר דרך אופטימלית לפתרון והסבר את בחירתך.
ד. מה הכוונה כאשר אומרים שעל גוף מופעל כוח שקול בן 60 ניוטון?



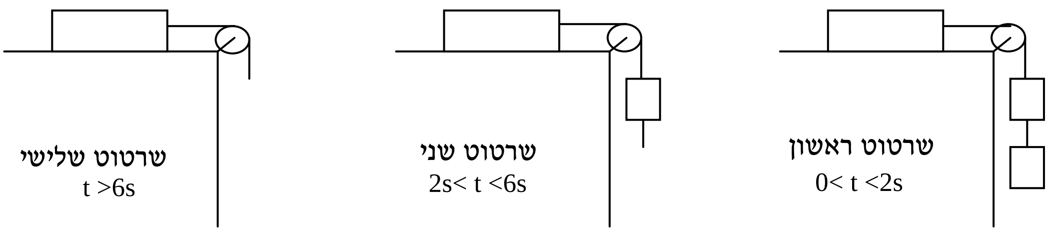
11. ** גוף A שמסתו 30 ק"ג מונח על מישור משופע, שזווית שיפועו היא 25^o. הגוף A קשור באמצעות חוט לגוף B בעל אותה מסה ותלוי באוויר. מקדמי החיכוך עם המשטח הם: $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$. המערכת נמצאת תחילה במנוחה.
א. שרטט תרשים הכוחות הפועלים על גוף A, ובחר מערכת צירים קרטזית כך שציר ה-x מקביל למדרון.
ב. בדוק האם הגוף A נמצא במנוחה או בתנועה.
ג. חשב את גודלם של כוח החיכוך ושל הכוח הנורמלי הפועלים על הגוף A.
ד. חשב את תאוצת מערכת הגופים.

ה. בחר מערכת צירים חדשה, כך שציר ה- x מקביל לבסיס המדרון (אופקי), וסמן את כל הכוחות הפועלים על הגוף A. פרק כל כוח לרכיביו הקרטזיים בהתאם למערכת הצירים החדשה.

ו. באמצעות מערכת הצירים החדשה, ובעזרת הערכים של כוח החיכוך ושל הכוח הנורמלי שמצאת בסעיף ג', חשב את תאוצת מערכת הגופים.

ז. מהי המסקנה הנובעת מתוצאות הסעיפים ד' ו- ו'?

12. * בשרטוט ראשון מתוארת מערכת מורכבת מגוף שמסתו 9kg , שתי משקולות בעלות 3kg כל אחת ושני חוטים שמסותיהם זניחות. המשטח חלק.
המערכת מתחילה לנוע ממצב מנוחה. לאחר שתי שניות מורידים את אחת המשקולות התלויות (שרטוט שני). לאחר 4 שניות נוספות מורידים גם את המשקולת התלויה השנייה (שרטוט שלישי).



א. שרטט במחברתך גרף מהירות- זמן מרגע $t = 0$ עד לרגע $t = 7s$ -
(1) כאשר בציר הזמן משבצת אחת מייצגת שנייה אחת.
(2) כאשר בציר הזמן שלוש משבצות מייצגות שנייה אחת.
הערה: בשני הגרפים יש לקחת את אותו קנה מידה בציר המהירות.

ב. האם כתוצאה משינוי קנה המידה של ציר הזמן השתנו -
(1) הזוויות של הקטעים השונים עם ציר הזמן?
(2) השיפועים של הקטעים השונים?

ג. מהו מיקום הגוף ביחס למיקומו ההתחלתי 4 שניות אחרי תחילת התנועה?

ד. אחרי כמה זמן יעבור הגוף מרחק של 60m?

ה. מהי המהירות הממוצעת של הגוף במשך 7 השניות הראשונות?

תשובות לתרגילים

2. א. $5.36\cdot10^{-4}\,m^3$

ב. $1.96kg$

3. ג. 30^o

4. א. $\frac{\pi\rho}{6}(2D^3+d^3)$

ב. (1) $\frac{29\pi\rho d^3}{162}$ **(2)** $\frac{3}{26}$

ג. $24\frac{21}{26}$

5. ב. $12.25\ cm$

ד. $\sim 211\frac{kg}{m^3}$

ה. $\sim 580\frac{kg}{m^3}$

7. א. (2) $\frac{F-g\cdot(m_1+m_2)\cdot(\sin\alpha+\mu_k\cdot\cos\alpha)}{m_1+m_2}$

ג. (1) $426N$ במעלה המדרון ; $66N$ במורד המדרון.

(2) $0\le F\le 66N$

8. ב. $26.6^\circ < \alpha \le 90^\circ$

11. ב. הגוף עובר את סף ההתנתקות.

ג. $f_k=54.378N\ ,N=271.892N$

ד. $1.98\frac{m}{s^2}$

ו. $1.98\frac{m}{s^2}$

12. ג. $29m$

ד. $6s$

ה. $11\frac{1}{7}m/s$

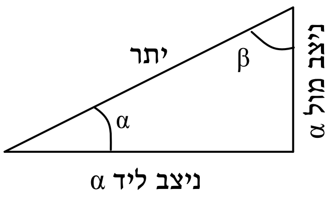
פרק ה – תנועות במישור

מושגים מתמטיים - זהויות טריגונומטריות, פרוק והרכבת וקטורים, משולשים דומים, פרבולה,היפרבולה, אסימפטוטה, מעגל, רדיוס, קוטר, מיתר, זווית מרכזית, מעלה, רדיאן, היקף מעגל, חרוט וחצי כדור,פונקציה ריבועית.

קשר לעולם הפיזיקה – משוואת מסלול, ההבדל בין בחירת מערכת צירים קרטזית לצורך ניתוח זריקות לעומת ניתוח תנועה מעגלית.

1. נושאים מתמטיים

1.1 טריגונומטריה – הנושא הוצג בהרחבה בפרק ב



תרשים 1 - משולש ישר זווית

- הגדרה של פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר- זווית

הפונקציה סינוס:

$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב מול } \alpha}{\text{היתר}}$$

הפונקציה קוסינוס:

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב ליד } \alpha}{\text{היתר}}$$

הפונקציה טנגנס:

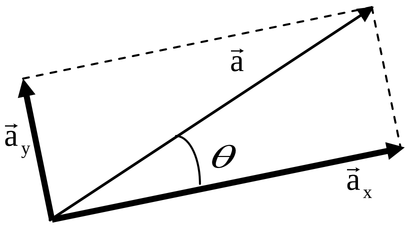
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב מול } \alpha}{\text{הניצב ליד } \alpha}$$

- בין שלוש הפונקציות הנ"ל מתקיים הקשר: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- מההגדרות הנ"ל נובע שבמשולש ישר זווית: $\sin\alpha = \cos\beta$ ו- $\cos\alpha = \sin\beta$
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית: $\alpha + \beta = 90^\circ$
- קשרים בין הפונקציות סינוס וקוסינוס: $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ו- $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$
- עבור כל זווית α מתקיים הקשר: $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$
- עבור שתי זוויות α_1 ו- α_2 המשלימות זו את זו ל- 90^o $(\alpha_1 + \alpha_2 = 90^o)$ מתקיים:

$2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = 2\cos\alpha_2\sin\alpha_2$, כלומר $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$

1.2 <u>פירוק, הרכבה וחיסור וקטורים</u> – הנושא הוצג בהרחבה בפרק ב

- פעולת <u>הפרוק</u> היא החלפה של וקטור נתון $\vec{a}$ בשני וקטורים $\vec{a}_x$ ו- $\vec{a}_y$ ניצבים זה לזה, כך שהווקטור המקורי הוא אלכסון המלבן המוגדר על ידי הווקטורים החדשים (ראה תרשים 2). נוח יותר כאשר הווקטורים החדשים נמצאים על הצירים של מערכת צירים קרטזיים אשר נבחרה במישור. הווקטורים החדשים מכונים <u>רכיבים קרטזיים</u> של הווקטור המקורי ופעולה זאת נקראת "פרוק הווקטור הנתון לרכיביו הקרטזיים".

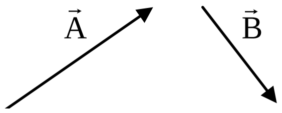


תרשים 2 - פרוק וקטור

- פעולת <u>ההרכבה</u> היא מציאת וקטור, כלומר גודלו וכיוונו, כאשר ידועים הרכיבים.

גודל הווקטור : $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, כיוון הווקטור: $\tan\theta=\dfrac{a_y}{a_x}$

- <u>פעולת החיסור</u> של שני וקטורים נתונים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ היא מציאת וקטור $\vec{D}$ אשר מקיים: $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ ($\vec{A}$ - מחוסר, $\vec{B}$ - מחסר)

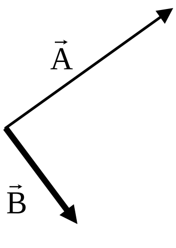


תרשים 3 - נתונים שני וקטורים

- ישנן שתי דרכים לביצוע חיסור שני וקטורים:

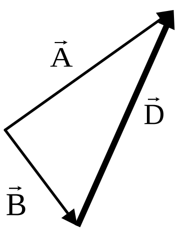
דרך I - חיסור <u>בשיטת המשולש</u>:

(1) מסדרים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששניהם יתחילו מאותה נקודה.



תרשים 4 -
וקטורים מתחילים מאותה נקודה (1)

(2) מחברים את קצותיהם של שני הווקטורים; כיוונו של $\vec{D}$ הוא כלפי המחוסר $\vec{A}$.



תרשים 5 - וקטור חיסור (2)

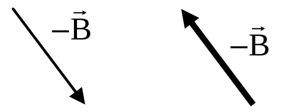
הערה: אפשר לראות שווקטור ההפרש $\vec{D}$ משלים את המחסר $\vec{B}$ למחוסר $\vec{A}$, כלומר $\vec{B}+\vec{D}=\vec{A}$

דרך II - חיסור <u>בשיטת החיבור עם הווקטור הנגדי</u>:

ניתן לכתוב: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

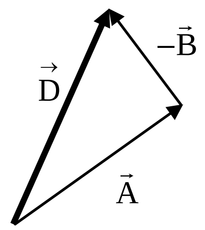
תהליך מציאת $\vec{D}$:

(1) בונים את $-\vec{B}$, שהוא הווקטור הנגדי ל- $\vec{B}$:



תרשים 6 - וקטור נגדי (1)

(2) מחברים את $-\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ באחת משיטות החיבור שתוארו לעיל:



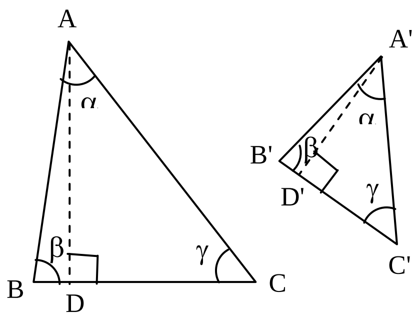
תרשים 7 - וקטור חיסור (2)

1.3 <u>משולשים דומים</u>

- אם לשני משולשים זוויות שוות בהתאמה, אומרים שהמשולשים <u>דומים</u> .

במשולשים דומים מתקיים אותו יחס בין הצלעות המתאימות (שתי צלעות אשר נמצאות בשני המשולשים מול זוויות שוות – תרשים 8).

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}}$$



תרשים 8 - משולשים דומים

כמו כן, קיים אותו יחס גם בין כל שני גבהים מתאימים, למשל:

$$\boxed{\frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'}}$$

1.4 <u>פרבולה</u> - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

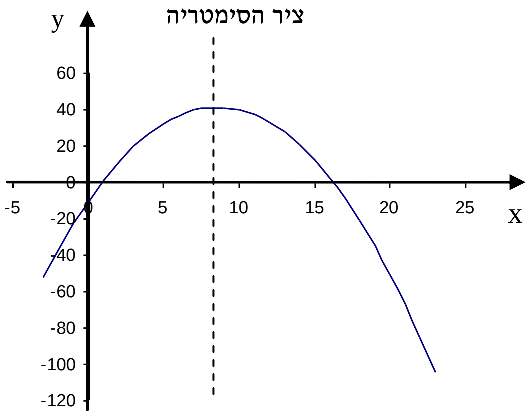
- פרבולה היא צורה של קו עקום במישור.
- משוואת פרבולה בה משתמשים בפיזיקה, במערכת צירים קרטזית, היא:

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0 \ .$$

- הפרבולה סימטרית יחסית לישר אנכי העובר דרך קודקודה. שיעור ה- x של נקודת הקדקוד הוא:

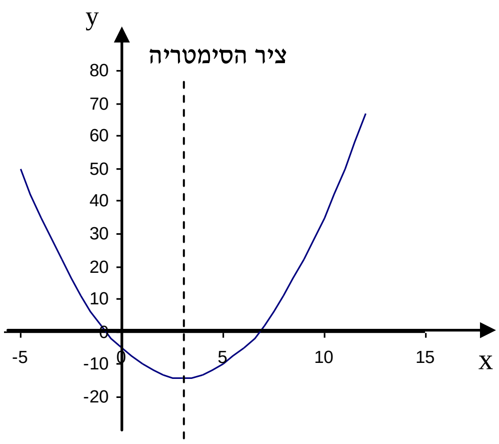
$$x = -\frac{b}{2a}$$

הקודקוד הוא נקודת מינימום אם $a>0$ (פרבולה קעורה "מחייכת"- תרשים 9) ונקודת מכסימום אם $a<0$ (פרבולה קמורה "בוכה"- תרשים 10).



$a<0$

תרשים 10 - פרבולה קמורה



$a>0$

תרשים 9 - פרבולה קעורה

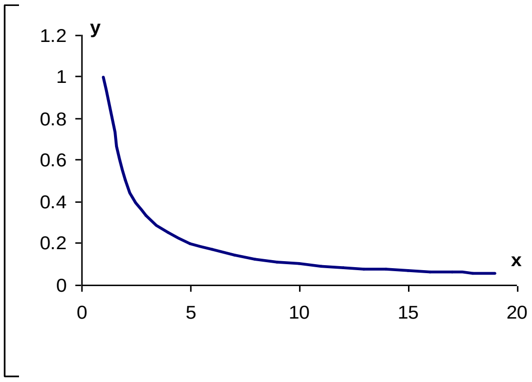
- נקודות החיתוך עם הצירים: ציר y - $y = c \quad , \quad x = 0$

ציר x - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad y = 0$

- משיק לקו עקום בנקודה הוא הקו הישר שנוגע בקו העקום רק בנקודה זאת.
- שיפוע של משיק לגרף עקום אינו קבוע, אלא משתנה מנקודה לנקודה.
- המשיק לפרבולה בנקודת הקודקוד הוא אופקי ושיפועו 0.
- בשתי נקודות סימטריות על פרבולה שיפועי המשיקים שווים בערכם המוחלט וסימניהם מנוגדים.
- פרבולה היא צורה <u>ללא אסימפטוטות</u>, כלומר לא קיים קו ישר שאליו שואפת הפרבולה להגיע.

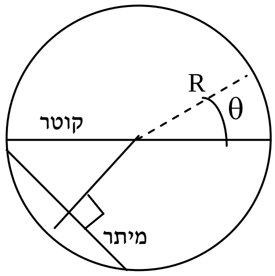
1.5 היפרבולה

- הפונקציה שמתארת יחס הפוך בין שני משתנים x ו- y מיוצגת בצורה אנליטית $y = \frac{1}{x}$ ובצורה גרפית על ידי היפרבולה.
- בתרשים 11 מופיעה היפרבולה . שני הצירים x ו-y הם אסימפטוטות של קוו זה.



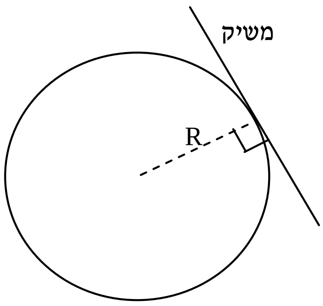
תרשים 11 - אסימפטוטות של היפרבולה

1.6 מעגל



תרשים 12 - מעגל

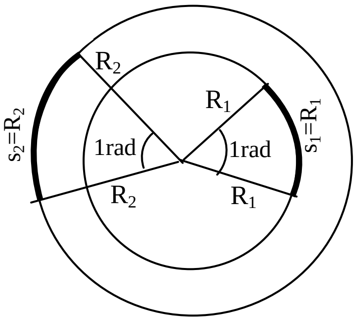
- רדיוס מעגל R הוא הקטע המחבר בין מרכז המעגל לנקודה כלשהי על ההיקף.
- מיתר הוא קטע המחבר בין שתי נקודות כלשהן על ההיקף.
- האנך האמצעי למיתר עובר דרך מרכז המעגל.
- קוטר הוא המיתר הארוך ביותר, כלומר המיתר שעובר דרך מרכז המעגל.
- זווית מרכזית היא זווית שקודקודה במרכז המעגל – היא נוצרת בין שני רדיוסים (θ בתרשים 12).
- משיק למעגל הוא קו ישר הנוגע במעגל בנקודה אחת בלבד (תרשים 13) .
- המעגל והמשיק נמצאים במישור אחד.
- בכל נקודה על פני מעגל הרדיוס והמשיק מאונכים זה לזה (תרשים 13)



תרשים 13 - רדיוס ומשיק במעגל

- היחידה הרגילה למדידה זוויות היא מעלה. זווית של מעלה אחת היא הזווית המרכזית במעגל שנשענת על קשת שאורכה $\frac{1}{360}$ מהיקף המעגל.

- הזווית המרכזית שמתאימה לחצי מעגל שווה ל 180° והזווית המרכזית שמתאימה למעגל שלם שווה ל 360°.
- יחידה אחרת למידת זוויות היא רדיאן (radian). זווית של רדיאן אחד היא הזווית המרכזית במעגל שנשענת על קשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל – ראה תרשים 14.
- הערה: גודל הזווית המרכזית אינו תלוי באורך הרדיוס, כלומר בגודל המעגל.

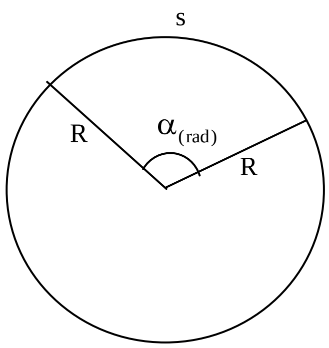


תרשים 14 - זוויות של רדיאן אחד

- מספר הרדיאנים של זווית מרכזית כלשהי שווה ליחס בין אורך הקשת עליה נשענת אותה זווית לבין אורך רדיוס המעגל (תרשים 15).

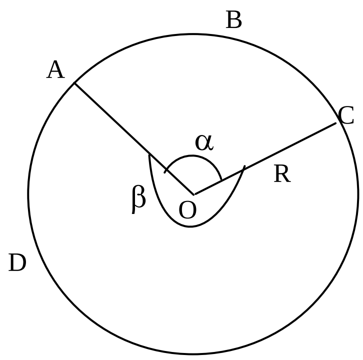
$$\alpha_{(rad)} = \frac{s}{R}$$

- הרדיאן איננו יחידת מדידה רגילה. המספר המבטא גודל זווית כלשהי ברדיאנים הוא מספר טהור, כלומר ללא ממדים, כי הוא מתקבל כיחס בין שני אורכים – אורך הקשת ואורך הרדיוס.



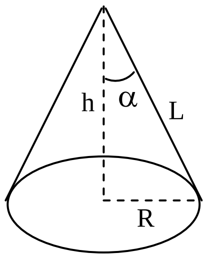
תרשים 15 - זווית מרכזית

- זווית מרכזית של 360^o נשענת על קשת שאורכה היקף המעגל וערכו $2\pi R$.
- הזווית המרכזית שמתאימה למעגל שלם שווה ל- 2π רדיאנים והזווית המרכזית שמתאימה לחצי מעגל שווה ל- π רדיאנים.
- $$1^o = \frac{2\pi}{360}\ \text{rad} \quad ; \quad 1\ \text{rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^o$$
- הצורה הדו-ממדית שמוגבלת על ידי קשת והזווית המרכזית שנשענת עליה נקראת גיזרה. בתרשים 16 אפשר לראות שתי גזרות – אחת ABCO בעלת זווית חדה α והשנייה ADCO בעלת זווית כהה β.



תרשים 16 - שתי גזרות במעגל

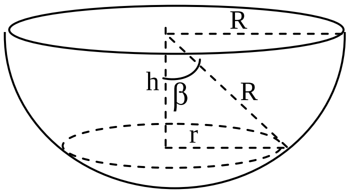
1.7 גיאומטריה במרחב



תרשים 17 - קונוס ישר

- קונוס (חרוט) ישר הוא גוף מאופיין על ידי בסיס וקודקוד, כך שהיטל הקודקוד נמצא במרכז הבסיס (תרשים 17).
- בחרוט ישר, רדיוס הבסיס R וגובה h הם הניצבים של משולש ישר זווית. במשולש זה אחת הזוויות החדות, α, היא מחצית זווית הראש של הקונוס.
- בין R, h, L ו- α מתקיימים הקשרים הבאים:

$$R = L \cdot \sin\alpha \ \ , \ \ h = L \cdot \cos\alpha \ \ , \ \ R = h \cdot \tan\alpha$$



תרשים 18 - חצי כדור

- חצי כדור ("קערה") מאופיין על ידי רדיוס R (תרשים 18).
- אפשר לבנות אינסוף עיגולים שמישורם מקביל לבסיס של חצי הכדור, כך שהרדיוס r הולך וקטן ככל שהמרחק h גדול יותר (ראה תרשים 18).
- בין הפרמטרים המסומנים בתרשים 5 מתקיימים הקשרים:

$$r = R \cdot \sin\beta \ \ , \ \ h = R \cdot \cos\beta \ \ , \ \ r = h \cdot \tan\beta$$

2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

2.1 זריקה אופקית וזריקה משופעת בהשפעת כוח הכובד בלבד

- לצורך ניתוח התנועה משתמשים תמיד במערכת צירים קרטזית הנשארת קבועה במשך כל תנועת הגוף. הגוף משנה את מיקומו במערכת צירים זאת ולכן הקואורדינטות (x,y) שלו משתנות עם הזמן.
- אחד הצירים אופקי והשני אנכי, משום שכיוון התאוצה בתנועה זאת הוא אנכי.
- הבחירה של נקודת ראשית הצירים ושל כיווני הצירים משפיעה על:
  - הסימנים והערכים של קואורדינטות הגוף,
  - הסימנים של רכיבי המהירות בכל אחד מהצירים,
  - סימן התאוצה.
- מסלול תנועת הגוף הוא פרבולה במישור (x,y) ולכן משוואתו היא משוואה ריבועית.
- וקטור המהירות מכוון לאורך המשיק למסלול, בהתאם למגמת התנועה.

- מהסימטריות של פרבולה נובע ש:

  - בתנועת הגוף בין שתי נקודות בעלות אותן קואורדינטות אנכיות y_1 ו- y_2, הזמן שווה הן בעליה והן בירידה (הזמן הדרוש לגוף לעבור מגובה y_1 לגובה y_2 שווה לזמן הדרוש לו לעבור מגובה y_2 לגובה y_1).
  - בשתי נקודות הנמצאות באותו גובה - גודל המהירות זהה.

- מהעובדה שלפרבולה אין אסימפטוטות, נובע שמהירות הגוף הנזרק לא יכולה להיות לעולם וקטור אנכי. הסיבה הפיזיקלית לכך היא שהרכיב האופקי של מהירות הגוף אינו משתנה במהלך התנועה, ולכן אינו מתאפס.

2.2 <u>תנועה מעגלית</u>

- מסלול תנועת הגוף הוא מעגל שלם או קשת מעגלית, והוא מאופיין על ידי רדיוס העקמומיות.

- לצורך ניתוח התנועה משתמשים תמיד במערכת צירים קרטזית כך שהגוף מהווה בכל רגע ורגע את נקודת הראשית. אחד הצירים מכוון אל מרכז המסלול המעגלי (ציר רדיאלי) והשני מאונך אליו, בהתאם לכיווני הכוחות הפועלים על הגוף.

- מערכת הצירים המתוארת היא ניידת, יחד עם הגוף.

3.תרגילים

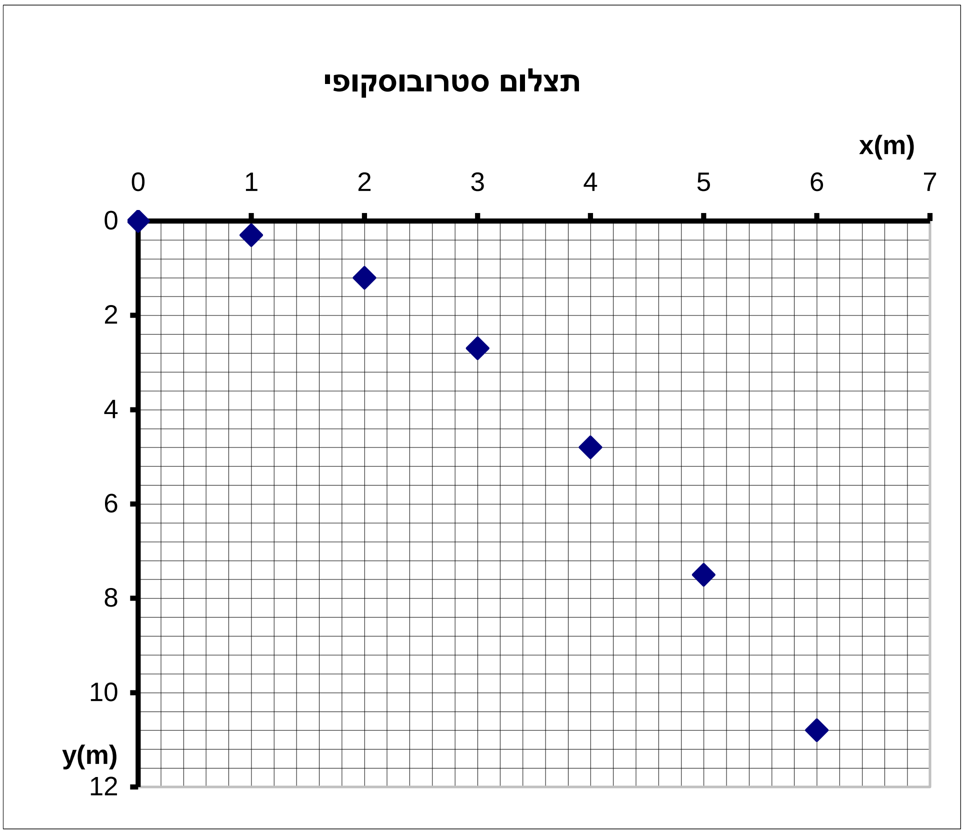
3.1 זריקות

1. נתונים שני וקטורים. האחד שגודלו 3 יחידות אורך וכוונו ימינה והשני שגודלו 4 יחידות אורך וכוונו מעלה.
   א. מהו הווקטור השקול - גודל וכוון?
   ב. עתה הופכים את הווקטור השני מלמעלה למטה מבלי לשנות את גודלו. מהו הווקטור השקול החדש ?
   ג. מהי הזווית בין וקטור השקול הראשון לווקטור השקול השני?
   ד. מצא את ההפרש בין הווקטור השקול שמצאת בסעיף ב' לבין הווקטור השקול שמצאת בסעיף א'. הראה את הדרך וחשב את הווקטור שמתקבל (גודל וכוון).
   ה. מהי המסקנה המתבקשת?

2. השלם בביטויים הבאים:
   א. $\sin\alpha = ...(90^o - \alpha)\ \ ,\ \ \cos\alpha = ...(90^o - \alpha)$
   ב. $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = ...\ \ ,\ \ 2\cdot\sin 30^o\cdot\cos 30^o = ...\ \ ,\ \ \sin 80^o = 2\cdot............$
   ג. $\sin 2\alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha_1 = ...\ ,\ \alpha_2 = ...$ (במעגל הראשון)
   ד. $\sin 2\alpha = -0.6 \Rightarrow \alpha_1 = ...\ ,\ \alpha_2 = ...$ (במעגל הראשון)
   ה. $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha_1 = ...\ ,\ \alpha_2 = ...$ (במעגל הראשון)
   ו. $\sin 2\alpha = 1.4 \Rightarrow \alpha_1 = ...\ ,\ \alpha_2 = ...$
   ז. $3.2\text{rad} = ...^o\ \ ,\ \ 72^o = ...\text{rad}$

3. נתונה הפונקציה $y = 5x^2 + 5x - 30$
   א. מהו סוג הפונקציה? נמק תשובתך .
   ב. מהן התכונות של הגרף המייצג את הפונקציה?
   ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים x ו- y.
   ד. חשב את הקואורדינטות של קודקוד הגרף בשתי דרכים שונות.
   ה. שני תלמידים שרטטו את גרף הפונקציה הנתונה במערכת צירים (x,y) , אבל כל אחד בחר בקנה מידה אחר של הצירים. במה דומים ובמה שונים, אם בכלל, הגרפים שקיבלו שני התלמידים? הסבר תשובתך.

4. התצלום הסטרובוסקופי הבא מיצג פונקציה מסוימת המתארת תנועתו של גוף הנזרק אופקית.



א. בנה טבלה שמייצגת את הפונקציה.

ב. בהנחה שמרווח הזמן בין שתי נקודות עוקבות הוא 0.5 שניות, הוסף לטבלה שבנית שורה\עמודה עם ערכי הזמן המתאימים.

ג. שרטט במערכות צירים נפרדות את הגרפים של המקום האופקי x כפונקציה של הזמן t ושל המקום האנכי y כפונקציה של הזמן t.

ד. בדוק האם הפונקציה $y(t)$ היא ריבועית, על ידי יישור (לינאריזציה) של גרף הפונקציה.

ה. חשב את גודלה של תאוצת הנפילה החופשית במקום בו נזרק הגוף.

ו. רשום את ביטויי הפונקציות $x(t)$ ו- $y(t)$.

ז. בטא את y באמצעות x , כך שבביטוי לא יופיע t. מהביטוי שקיבלת הסק מסקנה לגבי הצורה הגיאומטרית של המסלול המיוצג על ידי התצלום הנתון.

5. * מטוס טס בגובה קבוע של 2000m, בקו ישר מעל פני הקרקע ומאיץ בתאוצה של $4\frac{m}{s^2}$. ברגע שמהירותו שווה ל- $200\frac{m}{s}$ נשמטת ממנו חבילה קטנה. כעבור שלוש שניות נשמטת מהמטוס חבילה קטנה נוספת. הזנח את התנגדות האוויר.

א. כמה זמן עובר מרגע שנשמטת החבילה הראשונה עד פגיעת החבילה השנייה בקרקע?
ב. מהו המרחק בין נקודות הפגיעה בקרקע של שתי החבילות?
ג. מהי מהירות הפגיעה (גודל וכוון) של החבילה הראשונה?

נניח שאותו מטוס היה טס באותם תנאים מעל הקרקע של כוכב לכת אחר, ושבכוכב זה היה לוקח לכל חבילה 25s לפגוע בקרקע.

ד. מצא את תאוצת הנפילה החופשית על פני הכוכב החדש.
ה. ענה על סעיף ב' בתנאיי הכוכב החדש .

6. * במסגרת אימון צבאי, מזל"ט טס בגובה של 1000m במהירות של $50\frac{m}{s}$ וחייל נמצא על הקרקע עם מרגמה. ברגע מעבר המזל"ט מעליו משגר החייל פגז מרגמה על מנת לפגוע במזל"ט. כעבור 10s פוגע הפגז במזל"ט (לפגז המרגמה אין מנוע).

א. מהי מהירותו (גודל וכוון) של הפגז ברגע עזיבתו את הקנה? הזנח את גובה הקנה.

במקרה שהמזל"ט מתחמק מפגיעת הפגז -

ב. כמה זמן לוקח לפגז להגיע לקרקע מרגע הירי?
ג. מהו הגובה המקסימאלי אליו מגיע הפגז?
ד. מהי מהירות הפגיעה של הפגז בקרקע (גודל וכוון)?

7. ** באתר של paintball התקינו "תותח על" שיורה פגזי צבע במהירות התחלתית v_0 לכיוון מטרה הנמצאת בגובה התותח, במרחק אופקי d ממנו.

א. פתח ביטוי לקשר בין טווח הירי הרצוי לבין זוויות הירי.

<u>**הנחיות :**</u>

- רשום תחילה ביטויים המתארים את מקום הפגז כפונקציה של הזמן בכל אחד מן הצירים בנפרד.
- השתמש בקשר: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$

ב. נתונים $v_0 = 600m/s$, $d = 20km$. מהן שתי הזוויות בהן ניתן לירות על מנת לפגוע במטרה (להגיע לטווח הרצוי)?

באמצעות תותח העל יורים בזה אחר זה, בכיוונים שונים ובהפרש זמן מסוים, שני פגזי צבע. לשניהם מהירות הירי $v_0 = 600m/s$ ושניהם פוגעים <u>בו זמנית</u> במטרה הנמצאת במרחק $d = 20km$ ממקום הירי. הסעיפים הבאים מתייחסים לסוגיה זו.

ג. הסבר באיזה סדר יש לירות את הפגזים, כלומר באיזו זווית יש לירות קודם, על מנת ששני הפגזים יפגעו במטרה בו זמנית?

ד. חשב מהו הפרש הזמנים הדרוש בין שתי היריות.

ה. מהו היחס בין גדלי מהירויות הפגיעה של שני הפגזים במטרה? נמק תשובתך.

8. ** רכבת נוסעת במהירות $72\frac{km}{h}$ על גשר אופקי. נוסע זורק אבן דרך חלון בכוון אופקי ובמאונך לכוון הנסיעה של הרכבת, במהירות אופקית של $10\frac{m}{s}$ יחסית לרכבת. האבן נופלת לתוך האגם שמתחת לגשר. פני המים נמצאים 20m מתחת לחלון הרכבת.

לצורך פתרון הבעיה יש לשים לב שהמצב המתואר הוא תלת-ממדי; לכן קל יותר לפתור אם משרטטים תרשימים דו-ממדיים במבט-על ובמבט-צד.

א. כמה זמן אחרי הזריקה פוגעת האבן בפני המים?

ב. בכמה מטרים התקדמה האבן בכוון מקביל לפסים עד שהיא פגעה במים?

ג. מהו המרחק של נקודת הפגיעה מן הפסים (מרחק זה נמדד לאורך כיוון אלכסוני במרחב!!)?

ד. מהו גודל המהירות בו פגעה האבן בפני המים?

ה. מצא את ווקטור "שינוי מהירות האבן" בין הנקודה בה האבן נמצאת בגובה 10m מעל המים, לבין הנקודה בה היא נמצאת בגובה של 5m מעל המים. מהי המסקנה הנובעת מהתוצאה?

9. * כדור נבעט מהקרקע בזווית של 25^o. ברגע שהמשיך למסלולו הוא אופקי, הכדור נמצא בגובה 4m מעל פני הקרקע.

א. חשב את גודל המהירות בה נבעט הכדור.

ב. חשב את מרחק הכדור מקודקוד המסלול לבין מקום הבעיטה.

ג. האם הדרך שעובר הכדור מנקודת הבעיטה עד לקודקוד המסלול שווה למרחק שחישבת בסעיף ב', קטנה ממרחק זה או גדולה ממנו? נמק.

ד. חשב את הזווית הנוספת בה ניתן לבעוט את כדור באותה מהירות התחלתית, כך שיפגע בקרקע בדיוק באותה נקודה בה פגע בבעיטה הראשונה.

ה. חשב לאיזה גובה מרבי עולה הכדור במצב מתואר בסעיף ד'.

10. * מגבעה אשר גובהה 625m ביחס למישור שבסביבתה, נורה פגז שמסתו 10kg, בזווית 30^o מעל לאופק ובמהירות התחלתית של 200 m/s. רוח אופקית נגדית מפעילה על הפגז כוח אופקי קבוע שגודלו 5 ניוטון.

א. האם ניתן להגדיר את תנועת הפגז כנפילה חופשית? הסבר.

ב. באיזה מרחק אופקי מנקודת הירי יפגע הפגז במטרה במישור?

ג. חשב את מהירותו וכוונו של הפגז ברגע פגיעתו בקרקע.

ד. שרטט באותה מערכת צירים (בצבעים שונים) את הגרפים של רכיבי המהירות (בכיוון האופקי ובכיוון האנכי) כפונקציה של הזמן.

ה. מהו הגובה המקסימאלי מעל המישור אליו יגיע הפגז במשך תנועתו?

3.2 תנועה מעגלית

11. שרטט במחברתך מעגל שרדיוסו 4cm ובחר על פניו שתי נקודות A ו- B, כך שאורך המיתר שמחבר אותן 5cm.

א. חשב את הזווית המרכזית הנשענת על קשת AB.

ב. שרטט קטע משיק למעגל החל מנקודה A ומגמתו כלפי נקודה B, כך שאורכו 3cm. פרט צעדיך.

ג. שרטט החל מנקודה B קטע משיק למעגל, בעל אותה מגמה ואותו אורך כמו הקטע ששרטטת בסעיף ב, וחשב מהי הזווית בין שני המשיקים.

ד. העתק (במקביל) לנקודה B את קטע המשיק שבנית בנקודה A וחבר את הקצוות של הקטעים המשיקים, כך שיתקבל משולש. כמו כן, שרטט את המיתר AB. הוכח ששני המשולשים שהתקבלו הם דומים. הסבר את משמעות המשפט "משולשים דומים".

ה. מה עלייך לעשות כדי שאורך הקשת AB ואורך המיתר AB יהיו קרובים זה לזה ככל הניתן?

12. נתון מעגל שקוטרו 6m.

א. מהו רדיוס המעגל ומה היקפו?

ב. חשב את השטח הכלוא בתוך המעגל (שטח העיגול).

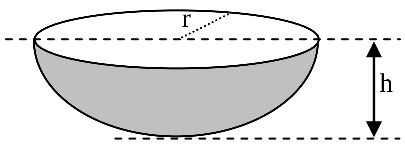
ג. מצא את אורך הקשת עליה נשענת זווית מרכזית בת 37^o.

ד. באותו מעגל נתון מיתר שארכו 2m. מהו גודל הזווית המרכזית שנשענת עליו?

ה. מהו אורך הקשת המתאימה למיתר שבסעיף ה' ומהו היחס בין אורכי הקשת והמיתר?

ו. מה צריך להיות רדיוס המעגל, בו קשת באורך 1cm מתאימה לזווית המרכזית של 1^o?

13. ** כדור ברזל שרדיוסו R פוגע במשטח חול ויוצר בו שקע (ראה תרשים). צורת שפת השקע היא מעגל שהיקפו P.



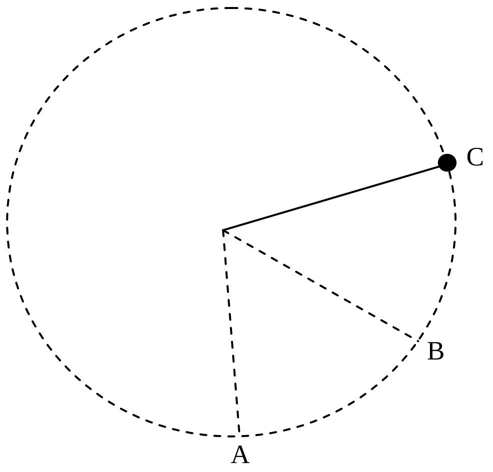
א. בטא את רדיוס שפת השקע r באמצעות P.

ב. רשום ביטוי המקשר בין R, r ו- h.

ג. אם נתונים R = 80mm ו- P = 188.4mm, מצא את הערכים של h לפי המשוואה שמתקבלת בהתאם לביטוי שבסעיף ב'.

ד. האם כל הפתרונות שקיבלת בסעיף ג' אפשריים מבחינה פיזיקלית? נמק.

14. * אבן שמסתה 200g, קשורה לחוט ומסובבת בקצב קבוע במעגל שרדיוסו R=6m במישור אופקי חסר חיכוך (ראה תרשים במבט-על). על מסלול תנועתה מסומנות שלוש נקודות, A, B ו- C, דרכן עוברת האבן במרווחי זמן של 1.5s. הזנח את מסת החוט ואת התנגדות האוויר.



א. מהי משמעותו הפיזקלית של מיתר AB?

ב. כיצד בעזרת המיתר AC ניתן להגיע למהירות הממוצעת של האבן בקטע זה?

ג. מהי התאוצה המשיקית של האבן לאורך הקשת AC? הסבר.

ד. מהי הזווית שכיסה החוט בין נקודות A ו- B, אם ידוע כי המהירות הממוצעת בקטע זה היא $4\frac{m}{s}$?

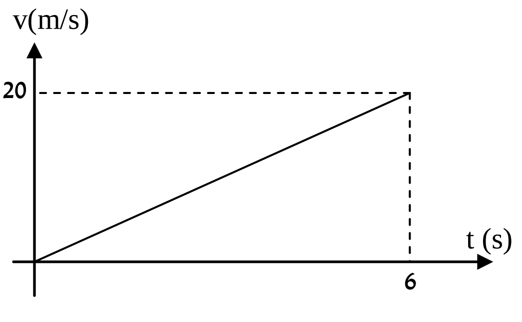
ה. חשב, <u>במידת הדיוק האפשרית</u>, את גודל הכוח שמפעיל החוט על האבן בנקודת B.

רמז: חשב קודם את המהירות הממוצעת בין הנקודות A ו- C.

ו. הסבר מדוע המהירות הממוצעת בין הנקודות A ו- C שונה מהמהירות הממוצעת בין הנקודות A ו- B.

ז. האם גודל המהירות הרגעית בנקודה B קטן מגודל המהירות הממוצעת בקטע AC, גדול ממנו או שווה לו? הסבר תשובתך.

15. * רוכב אופנוע מתאמן במגרש שצורתו מעגל. גודל מהירות הרוכב בשמינית המסלול כפונקציה של הזמן מתואר בגרף הבא:



א. מהו רדיוס מסלול המגרש?

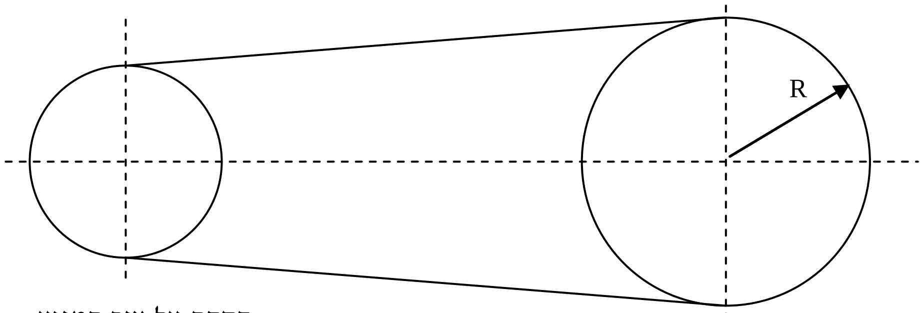
ב. מה מייצג שיפוע הגרף הנתון? חשב את השיפוע ורשום את המשמעות הפיזיקלית של התוצאה.

ג. חשב את התאוצה הכוללת של רוכב האופנוע ברגע $t = 3s$ והסבר באופן מפורט את צעדיך.

ד. אם מסת הרוכב יחד עם האופנוע היא 150kg, חשב את הכוח השקול שפועל על האופנוע ברגע $t = 6s$.

ה. אילו הגרף שבתרשים היה בצורה של קו אופקי, האם תנועת הרוכב הייתה מואצת? אם לא - הסבר למה לא, אם כן - הוכח זאת בהסתמך על חוק פיזיקאלי מתאים.

16. ** מנוע מסובב דסקה המושחלת על צירו בתדירות קבועה. הדסקה יכולה לסובב דסקיות בעלות רדיוסים שונים באמצעות רצועות תמסורת שלא ניתנות למתיחה (ראה תרשים).



לפניך טבלה בה רשומים לגבי כל דסקית הרדיוס וגודל התאוצה הרדיאלית של נקודה על שפתה.

מספר הדסקית	רדיוס הדסקית $R(m)$	תאוצה $a(m/s^2)$
1	0.6	6.68
2	0.75	5.32
3	0.9	4.44
4	1.05	3.84
5	1.2	3.23
6	1.35	2.96
7	1.5	2.68

א. שרטט גרף של התאוצה כפונקציה של רדיוס הדסקית.

ב. בחר משתנה חדש על מנת לקבל גרף לינארי של התאוצה כפונקציה של המשתנה החדש.

ג. הוסף לטבלה עוד עמודה ורשום בה את ערכי המשתנה החדש.

ד. שרטט גרף שאליו מתייחס סעיף ב. מהו שיפוע הגרף ומהן יחידותיו?

ה. חשב בעזרת הגרף הלינארי את גודל המהירות הקווית של רצועת התמסורת.

תשובות לתרגילים

5. א. $23s$
ב. $858m$
ג. 45^{o} ,$282.8m\backslash s$
ד. $6.4m/s^2$
ה. $918m$

6. א. $158.114m/s$, 71.57^{o}
ב. $30s$
ג. $1125m$

7. א. $\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$
ב. 16.87^{o} , 73.13^{o}
ד. $80s$
ו. $600m/s$

8. א. $2s$
ב. $40m$
ג. $\sim 49m$
ד. $30m/s$

9. א. $21.16m/s$
ב. $17.1m$
ד. 65^{o}
ה. $18.4m$

10. ב. $4173.88m$
ג. $219.83m/s$, 43^{o}
ה. $1125m$

12. א. $3m$, $18.85m$
ב. $28.27m^2$
ג. $\sim 1.94m$
ד. 38.94^{o}
ה. $2.04m$, 1.02
ו. $\sim 57.3cm$

13. ג. $5.83mm$

14. ד. 60^{o}
ה. $0.4N$

15. א. $76.4m$
ב. $3.33m/s^2$
ג. $3.58m/s^2$
ד. $\sim 931N$

16. ה. $2m/s$

פרק ו - התנע ושימורו

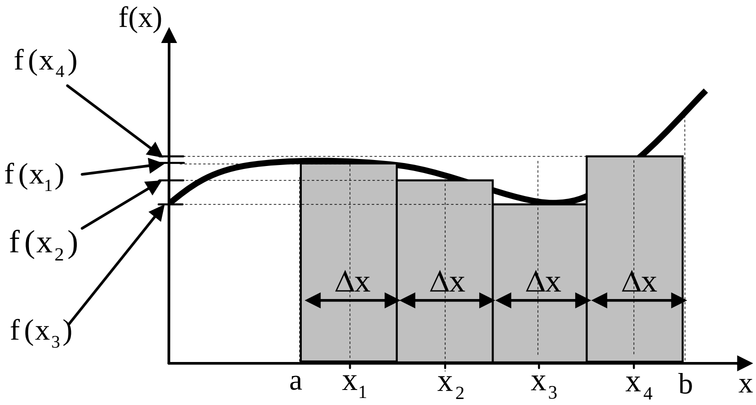
מושגים מתמטיים – נגזרת ואינטגרל מסוים של פונקציה, מערכת שתי משוואות עם שני נעלמים, שטחים של צורות גיאומטריות, וקטורים ופעולות עם וקטורים.

הקשר למושגים פיזיקליים – הקשרים המתמטיים בין מתקף לכוח, בין כוח שקול לתנע – בצורה אנליטית וגרפית, פעילויות עם וקטורי תנע.

1. נושאים מתמטיים

1.1 אינטגרל מסוים של פונקציה - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

- בעזרת אינטגרל מסוים אפשר לחשב שטח שבין גרף פונקציה לבין ציר המשתנה הבלתי תלוי.
- החישוב המקורב של השטח יכול להיעשות על ידי חלוקתו למלבנים (כי חישוב שטח מלבן הוא פשוט) וחיבור שטחי כל המלבנים - תרשים 1.

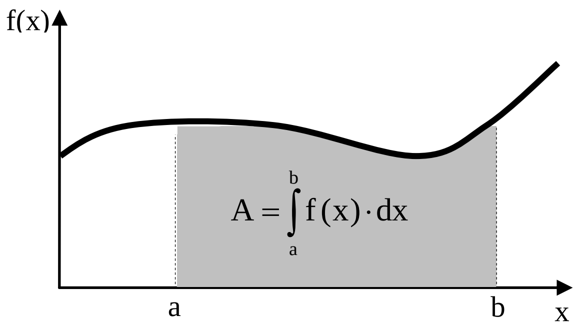


תרשים 1 - קירוב שטח כסכום שטחי מלבנים

- השטח המקורב הוא סכום שטחי המלבנים שנבנו:

$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\cdot\Delta x$$

- הקירוב הולך ומשתפר ככל שהרוחב Δx של המלבנים שנבנו הולך וקטן, וכך מספר המלבנים הולך וגדל. "הקירוב" האופטימלי (כלומר הקירוב שייתן ערך מדויק של השטח - ראה תרשים 2) מתקבל כאשר רוחב המלבנים שואף לאפס וכתוצאה מכך



תרשים 2 - השטח המחושב באמצעות אינטגרל מסוים

מספר המלבנים שואף לאינסוף:

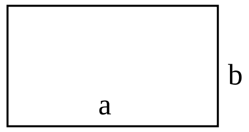
$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

- בכתיב זה dx מסמן את הרוחב הקטן מאד של כל אחד מהמלבנים, f(x) הוא הגובה של המלבן הנבנה בסביבתו הקרובה מאד של x והסימן $\int_a^b$ מסמן את האינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) מ- $x = a$ עד ל- $x = b$.

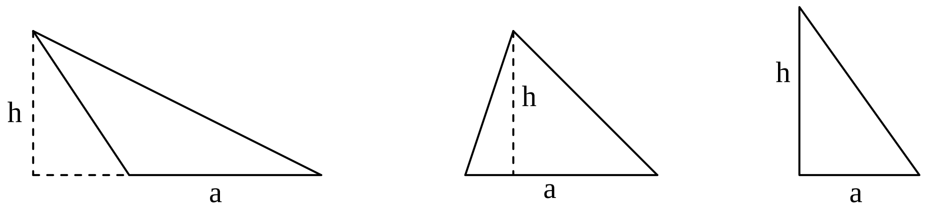
1.2 <u>שטחים של צורות גיאומטריות</u> - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

- שטח המלבן (תרשים 3) : $A = a\cdot b$



תרשים 3 - מלבן

- שטח המשולש (תרשים 4) : $A = \frac{a\cdot h}{2}$

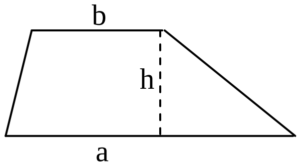


משולש קהה זווית　　משולש חד זווית　　משולש ישר זווית

תרשים 4 - משולשים

- שטח הטרפז (תרשים 5) :

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$



תרשים 5 - טרפז

- יחידת המדידה של שטח היא חזקה 2 של יחידת המדידה של אורך. לדוגמה: m^2 (מ"ר) - היחידה הבסיסית (SI), cm^2 (סמ"ר), km^2.

1.3 וקטורים (הנושא הוצג בהרחבה בפרק ב)

וקטורים מקבילים ואנטי-מקבילים

- יש להבדיל בין שני מקרים של וקטורים הנבנים על ישרים מקבילים:

- וקטורים מקבילים, שהם בעלי אותו כיוון (תרשים 6א), ולכן הזווית ביניהם 0^o.

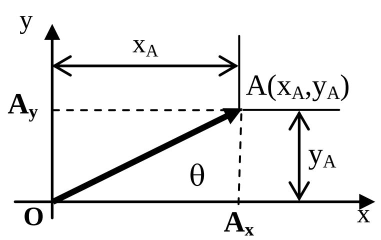
- וקטורים אנטי- מקבילים, שהם בעלי כיוונים מנוגדים (תרשים 6ב), ולכן הזווית ביניהם 180^o.

תרשים 6 - וקטורים מקבילים

הצגות וקטור

ניתן להציג וקטור בשתי דרכים:

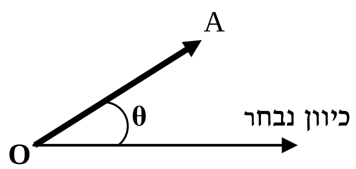
א. הצגה קרטזית (אלגברית) - באמצעות שיעורי הקצה של הווקטור, כאשר התחלתו בראשית הצירים (תרשים 7)



תרשים 7 - הצגה קרטזית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי שיעורי הקצה,** $\vec{OA} = (x_A, y_A)$

ב. הצגה פולארית (קוטבית או גיאומטרית) - באמצעות גודל וכיוון יחסית לכיוון נבחר (תרשים 8)



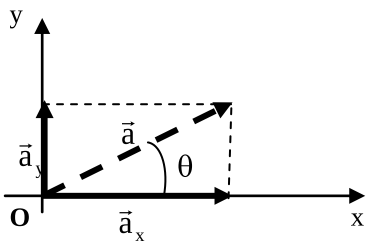
תרשים 8 - הצגה פולארית של וקטור

$\vec{OA}$ **מיוצג על ידי גודלו וכיוונו,** (OA, θ) , **או** $(|\vec{OA}|, \theta)$

<u>פרוק והרכבת וקטור במישור</u>

- <u>פרוק</u> וקטור במישור הוא פעולת החלפת וקטור נתון במספר מינימלי (שניים) של וקטורים חדשים, כך שסכומם של הווקטורים החדשים הוא הווקטור הנתון.
- שני הווקטורים החדשים שמתקבלים בפרוק נקראים <u>רכיבי הווקטור</u> הנתון.
- הפרוק הנפוץ הוא <u>לרכיבים קרטזיים</u>, כלומר לשני רכיבים מאונכים זה לזה.
- כאשר וקטור $\vec{a}$ נתון בהצגתו הפולארית (גודל a וכיוון θ), הדרך לחישוב הרכיבים הקרטזיים היא (ראה גם תרשים 9):

$$a_x = a \cdot \cos\theta \qquad , \qquad a_y = a \cdot \sin\theta$$

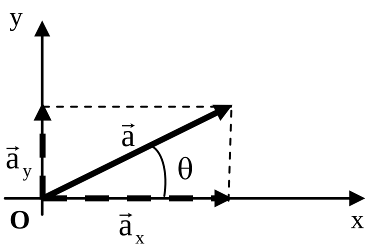


תרשים 9 - פרוק וקטור נתון

- <u>הרכבת</u> וקטור במישור היא פעולת החלפת שני וקטורים בווקטור אחד שהוא סכומם.
- ההרכבה הנפוצה היא של שני וקטורים מאונכים זה לזה.
- כאשר נתון וקטור $\vec{a}$ בהצגתו הקרטזית (שני הרכיבים a_x , a_y), חובה לשרטט את שני הרכיבים במערכת צירים (תרשים 10) לפני חישוב כיוון הווקטור.
- הדרך לחישוב הגודל והכיוון של $\vec{a}$ (הצגה פולארית) היא:

גודל הווקטור - $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

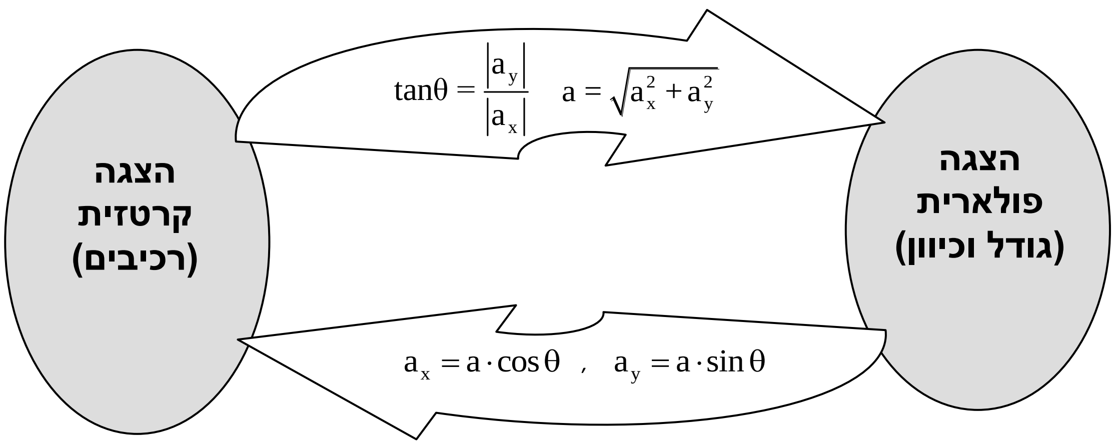
כיוון הווקטור - $\tan\theta = \dfrac{|a_y|}{|a_x|}$



תרשים 10 - הרכבת וקטור

- הזווית θ מוגדרת בהתאם לשרטוט שבוצע לפני החישוב.

נסכם את דרך המעבר בין הצגה אחת לשנייה בתרשים הבא:

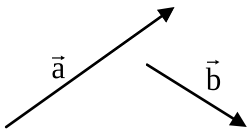


פעולות עם וקטורים

א. פעולות עם וקטורים בייצוג פולארי (גיאומטרי)

בכל פעולה נתאר כיצד מקבלים את וקטור התוצאה על ידי תרשים מתאים. אפשר לחשב את הגודל והכיוון של וקטור זה בעזרת משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים הרשומים בסעיף 1.3 של פרק ב.

- חיבור וקטורי של שני וקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ הוא פעולה, שכתוצאה ממנה מתקבל וקטור סכום $\vec{c}$, כך ש- $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

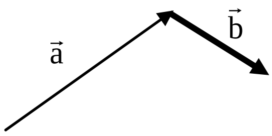


נתונים שני וקטורים

תהליך קבלת הווקטור סכום $\vec{c}$, כאשר נתונים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$:

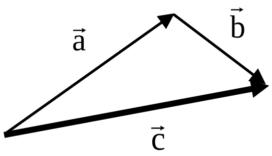
דרך I - חיבור לפי כלל המשולש (תרשים 11) :

(1) מעתיקים את אחד הווקטורים הנתונים, כך שהתחלתו תהיה בקצה הווקטור האחר.



(1) העתקה של וקטור אחד בסוף של השני

(2) מקבלים את וקטור הסכום על ידי חיבור נקודת ההתחלה של הווקטור הראשון עם קצה הווקטור השני. כיוונו של וקטור הסכום הוא אל קצה הווקטור השני.

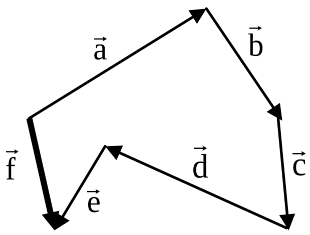


(2) קבלת הווקטור סכום

תרשים 11 - חיבור וקטורי לפי כלל המשולש

אם מחברים יותר משני וקטורים, אפשר להכליל את כלל המשולש (תרשים 12) – כלל המצולע:

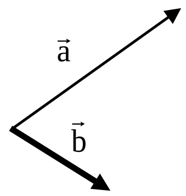
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{f}$$



תרשים 12 - המצולע לחיבור חמישה וקטורים

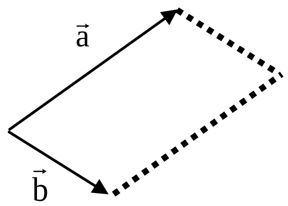
דרך II – חיבור לפי כלל המקבילית (תרשים 13):

(1) משרטטים את הווקטורים $\vec{a}$ו-$\vec{b}$ כך ששניהם יתחילו מאותה נקודה.



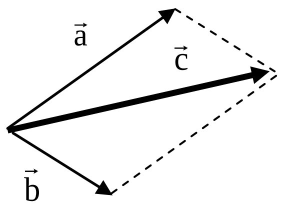
(1) סידור התחלות הווקטורים מאותה נקודה

(2) בונים מקבילית כך ש- $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מהווים שתי צלעות צמודות שלה.



(2) בניית מקבילית

(3) הווקטור $\vec{c}$ מתקבל לאורך אלכסון המקבילית, המתחיל מהנקודה המשותפת של הווקטורים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ והוא מכוון כלפי הקודקוד הרביעי של המקבילית.



(3) האלכסון הוא וקטור הסכום

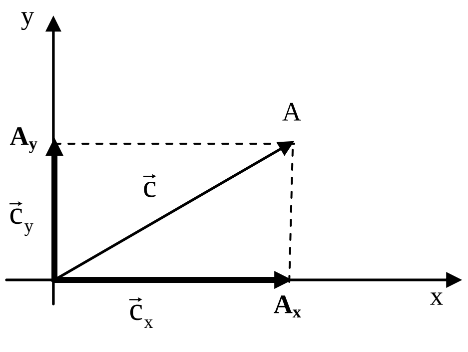
תרשים 13 - חיבור וקטורי לפי כלל המקבילית

הערה: וקטור הוא הסכום הווקטורי של רכיביו (תרשים 14):

$$\boxed{\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y}$$

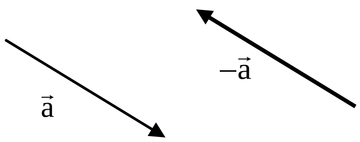
או ברישום של וקטור על ידי אות אחת:

$$\boxed{\vec{c} = \vec{c}_x + \vec{c}_y}$$



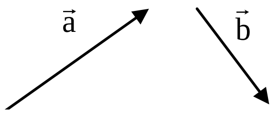
תרשים 14 - וקטור הוא סכום וקטורי של רכיביו

- הווקטור הנגדי לווקטור נתון $\vec{a}$ הוא וקטור בעל אותו גודל אבל בכיוון מנוגד. רושמים אותו $-\vec{a}$ (תרשים 15).
הסכום של וקטור והנגדי שלו שווה ל- 0.



תרשים 15 - וקטור נגדי

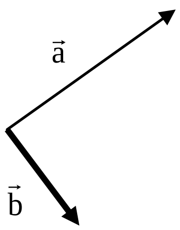
- חיסור וקטורי של שני וקטורים נתונים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ הוא פעולה של מציאת וקטור הפרש $\vec{d}$. נדגים בהמשך כיצד מגיעים להפרש $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ ($\vec{a}$- מחוסר, $\vec{b}$- מחסר). כמובן, אותם שני וקטורים יכולים ליצור עוד וקטור הפרש, $\vec{d}'=\vec{b}-\vec{a}$ ובין שני וקטורי הפרש מתקיים $\vec{d}'=-\vec{d}$.



תרשים 16 - נתונים שני וקטורים

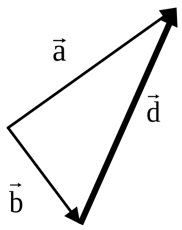
דרך I - חיסור בשיטת המשולש:

(1) משרטטים את שני הווקטורים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ כך ששניהם יתחילו מאותה נקודה.



תרשים 17 -
וקטורים מתחילים מאותה נקודה (1)

(2) מחברים את קצותיהם של שני הווקטורים; כיוונו של $\vec{d}$ הוא כלפי המחוסר $\vec{a}$.



תרשים 18 - וקטור חיסור (2)

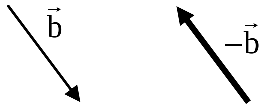
הערה: אפשר לראות שווקטור ההפרש $\vec{d}$ משלים את המחסר $\vec{b}$ למחוסר $\vec{a}$, כלומר $\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}$

דרך II - חיסור <u>בשיטת החיבור עם הנגדי</u>:

ניתן לכתוב: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

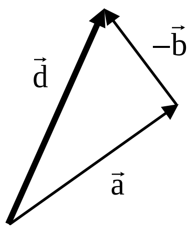
תהליך מציאת $\vec{d}$:

(1) בונים את $-\vec{b}$, שהוא הווקטור הנגדי ל- $\vec{b}$:



תרשים 19 - וקטור נגדי (1)

(2) מחברים את $-\vec{b}$ ל- $\vec{a}$ באחת משיטות החיבור שתוארו לעיל:



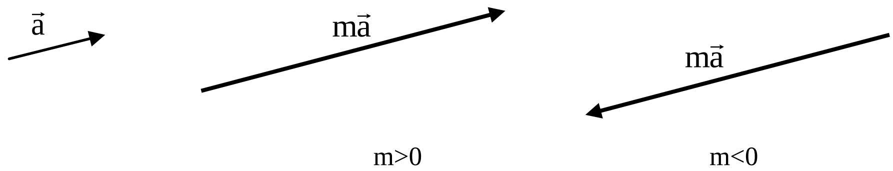
תרשים 20 - וקטור חיסור (2)

<u>כפל</u> בין וקטור למספר (סקלר)

תוצאה של מכפלת וקטור $\vec{a}$ בסקלר m היא וקטור (תרשים 21) $\vec{b}$ שגודלו :

$$b=|m|\cdot a$$

וכיוונו ככיוון $\vec{a}$ אם m חיובי או מנוגד ל- $\vec{a}$ אם m שלילי.



תרשים 21 - מכפלת וקטור בסקלר

ב. פעולות עם וקטורים בייצוג קרטזי (אלגברי)

ניתן לבצע פעולות בווקטורים על ידי שימוש ברכיביהם הקרטזיים. לשם כך יש לבצע את הפעולות הבאות:

(1) פירוק כל אחד מן הווקטורים הנתונים לרכיבים הקרטזיים בתרשים,

(2) חישוב הרכיבים,

(3) ביצוע הפעולה הנדרשת בנפרד בכל ציר:

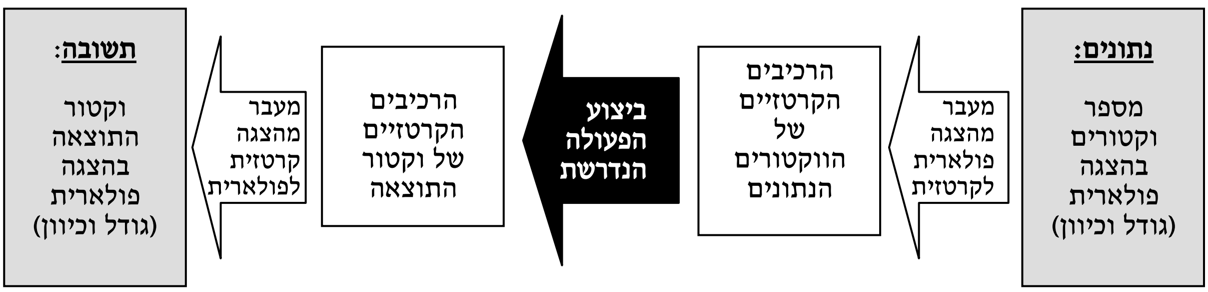
- חיבור -
$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

- חיסור -
$$\begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \end{cases}$$

- כפל בסקלר -
$$\begin{cases} b_x = m a_x \\ b_y = m a_y \end{cases}$$

(4) מציאת הגודל והכיוון של התוצאה.

נסכם את השלבים השונים על ידי תרשים הזרימה הבא:



1.4 נגזרת של פונקציה (הנושא הוצג בהרחבה בפרק א)

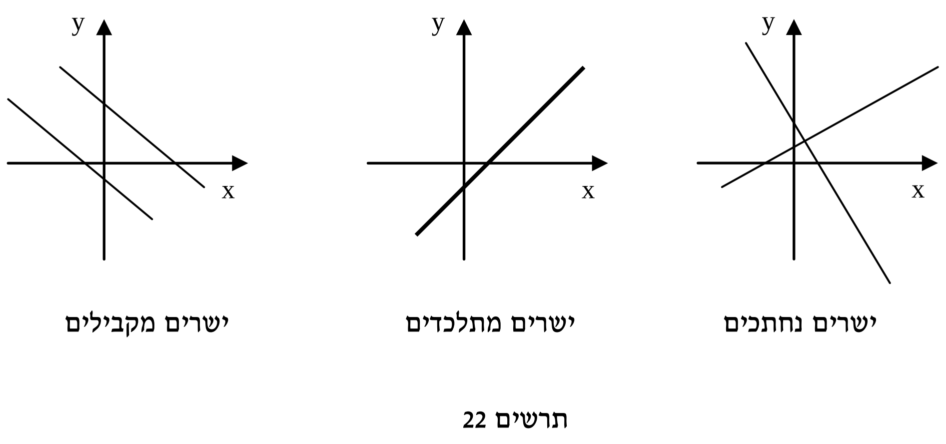
- נגזרת של פונקציה $y = f(x)$ בנקודה x_0 מוגדרת כגבול אליו שואף היחס בין שינוי הפונקציה לבין שינוי הארגומנט כאשר שינוי הארגומנט שואף לאפס.
- נהוג לסמן נגזרת של פונקציה $y = f(x)$ על ידי $y'(x)$ או על ידי $\frac{dy}{dx}$. הצורה השנייה מדגישה שהגזירה נעשית לפי המשתנה x.
- בצורה אנליטית: $$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$
- הנגזרת משקפת את קצב השתנות הפונקציה.
- המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0.
- בפיזיקה נהוג לסמן נגזרת לפי זמן על ידי נקודה מעל למשתנה שנגזר.

1.5 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

- הצורה הכללית של מערכת של שתי משוואות ממעלה ראשונה (משוואות לינאריות):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- פתרון המערכת הוא זוג ערכים מספריים עבור שני המשתנים x ו- y . הצבת שני ערכים אלה בכל אחת מהמשוואות הופכת אותה לפסוק אמת.
- כל משוואה מייצגת קו ישר במערכת צירים x,y .
- פתרון המערכת (שיעורי x ו- y) מורכב משיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים.
- ישנן שלוש שיטות לפתרון מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים: שיטת ההצבה, שיטת השוואת המקדמים והשיטה הגרפית.
- מספר פתרונות: פתרון יחיד – ישרים נחתכים , אינסוף פיתרונות – ישרים מתלכדים , או אף פתרון – ישרים מקבילים (תרשים 22).



תרשים 22

2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

- המתקף של כוח כלשהו $\vec{F}$ הפועל על גוף בפרק זמן מ- t_1 עד ל- t_2 מוגדר כאינטגרל מסוים של הפונקציה $\vec{F}(t)$ באותו פרק זמן: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt$
- הצורה המקורית של החוק השני של ניוטון (כפי שאייזיק ניוטון ניסח אותו במאה ה- 17) מקשרת בין הכוח השקול $\Sigma\vec{F}$ הפועל על גוף ברגע מסוים לבין התנע הרגעי של הגוף $\vec{p}$ באותו רגע:

$$\Sigma F = \frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = \dot{p}$$

כלומר, הכוח השקול בכל רגע שווה לנגזרת התנע באותו רגע.

- כאשר על גוף פועל כוח שכיוונו נשאר כל הזמן לאורך אותו ציר, ונתון גרף הכוח כפונקציה של הזמן, המתקף שפועל על הגוף בפרק זמן מ- t_1 עד t_2 מיוצג על ידי השטח שבין הגרף לציר הזמן, באותו פרק זמן.
- באותו מקרה שכיוון הכוח הפועל על גוף נשאר כל הזמן לאורך אותו ציר, ונתון גרף התנע כפונקציה של הזמן, שיפוע המשיק לגרף בנקודה כלשהי שווה לכוח השקול ברגע המתאים באותה נקודה.
- השינוי בתנע של גוף בין שני רגעים t_1 ו- t_2 הוא ההפרש הווקטורי של התנעים המתאימים:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

- תנע של מערכת גופים הוא הסכום הווקטורי של התנעים של כל גופי המערכת.

3. תרגילים

1. נתונים שני וקטורים. לווקטור הראשון גודל 10 יחידות אורך, וכיוונו עם הכוון החיובי של ציר ה- x . לווקטור השני גודל 8 יחידות אורך, וכיוונו בכיוון השלילי של ציר ה- x.

א. מצא את ההפרש בין הווקטור הראשון לווקטור השני.

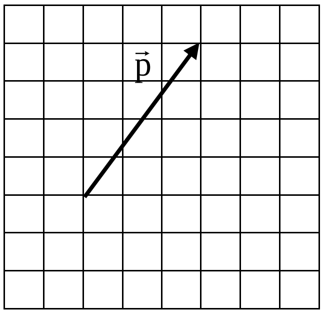
ב. מצא את ההפרש בין הווקטור השני לווקטור הראשון.

ג. מה תוכל להסיק מהשוואת התוצאות שקיבלת בסעיפים א' ו- ב'?

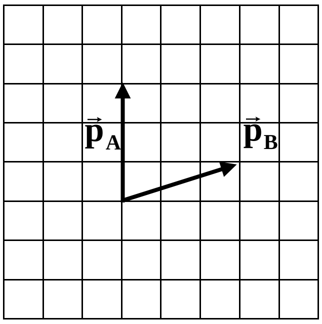
ד. חשב את הסכום של הווקטור הראשון עם הווקטור השני.

ה. הופכים את כיוונו של הווקטור הראשון. חשב את השינוי בווקטור זה.

2. * תלמיד פיזיקה בנה משטח, שחלקו מחוספס וחלקו מצופה קרח (החיכוך זניח) ועליו הניח שתי דסקיות A ו- B. לאחר מכן הוא העניק לדסקית A תנע $\vec{p}$, כמתואר בתרשים א. אחרי זמן מה, התנגשה דסקית A בדסקית B. בתרשים ב משורטטים התנעים $\vec{p}_A$ ו- $\vec{p}_B$ של שתי הדסקיות מיד אחרי ההתנגשות.



תרשים א



תרשים ב

א. בדוק, על סמך תרשימים א' ו-ב', האם נשמר תנע המערכת (של שתי הדסקיות) כתוצאה מההתנגשות, בשלוש הדרכים הגיאומטריות הבאות:

(1) על-ידי מציאת התנע הכולל לפני ואחרי ההתנגשות (כלומר פתרון גיאומטרי).

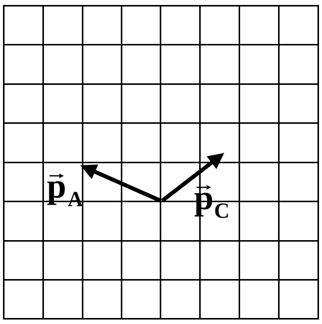
(2) על-ידי מציאת רכיבי התנע הכולל לפני ואחרי ההתנגשות (כלומר פתרון אלגברי).

(3) על-ידי מציאת וקטור המתקף שפעל על כל דסקית בזמן ההתנגשות.

ב. על-סמך ממצאיך בסעיף א', קבע האם ההתנגשות התרחשה בחלק המחוספס של המשטח או בחלקו שמצופה קרח.

כעבור זמן- מה אחרי התנגשותה בדסקית B,

הדסקית A התנגשה בדסקית נוספת C שנחה על המשטח. התנעים של שתי הדסקיות לאחר התנגשות זו מתוארים בתרשים ג'.

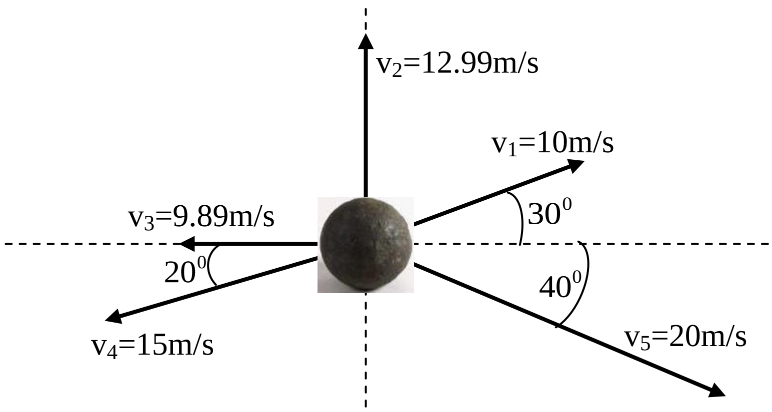


תרשים ג'

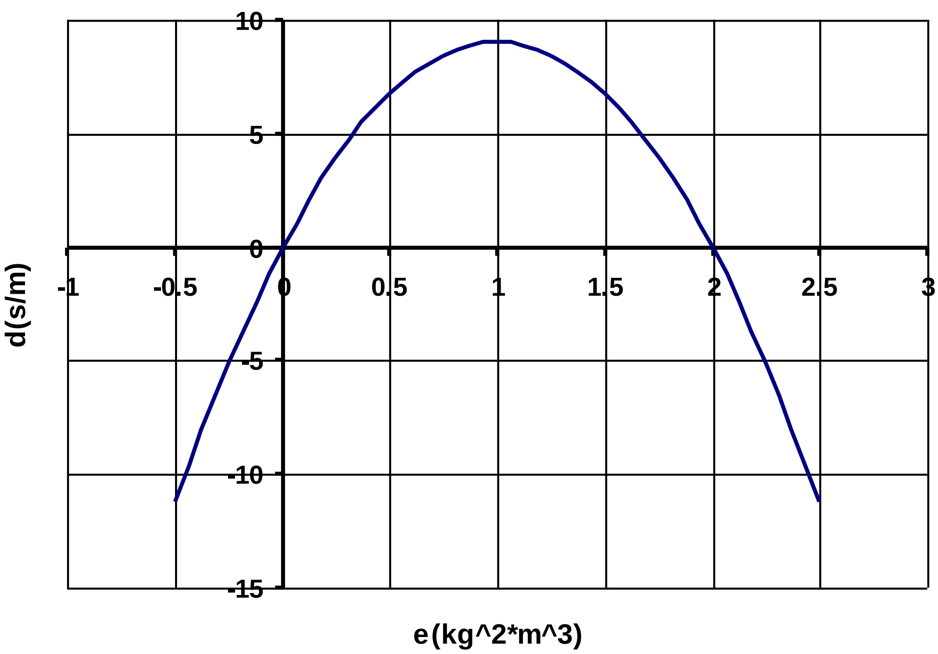
ג. בדוק, על סמך התרשימים ב' ו- ג', האם נשמר התנע הכולל בהתנגשות השנייה, בשתיים מתוך שלוש הדרכים שצוינו בסעיף א.

ד. על-סמך ממצאיך, קבע האם ההתנגשות בין הכדורים A ו- C התרחשה בחלק המחוספס או בחלק המצופה קרח של המשטח.

3. פגז התפוצץ לחמישה רסיסים זהים במסותיהם. לפניך תיאור וקטורי המהירות של הרסיסים. האם הפגז היה במנוחה ברגע הפיצוץ? ענה מבלי לפרק את הווקטורים לרכיביהם הקרטזיים (מומלץ לפתור באמצעות מצולע - ראה את הסעיף המתאים בחלק התיאורטי של פרק זה).



4. נתון גרף כמתואר בתרשים:



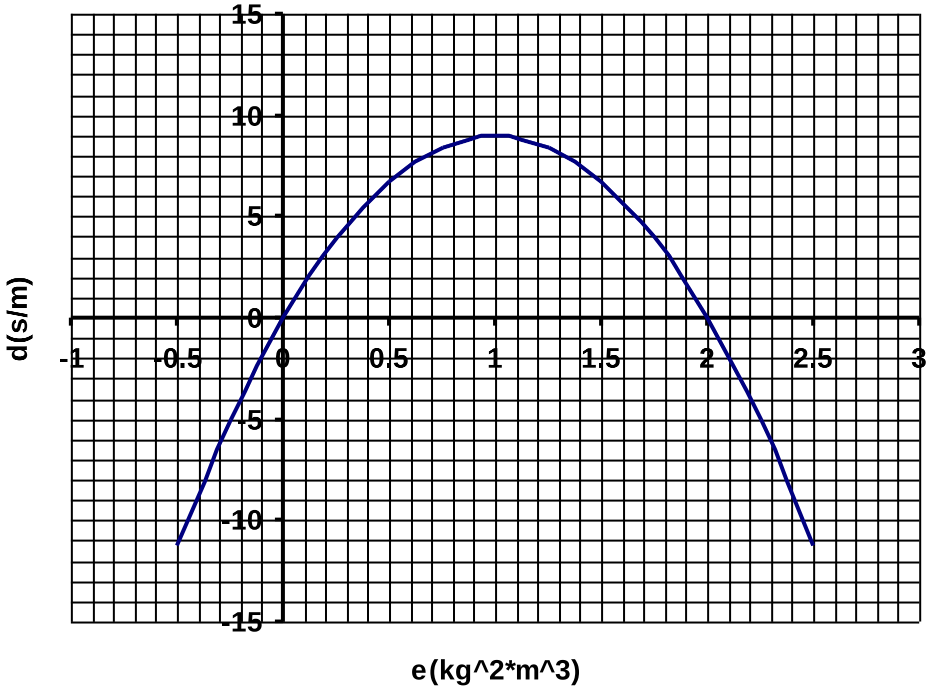
א. האם גרף זה מייצג פונקציה? נמק.

ב. האם לשיפוע של המשיק לגרף זה יש יחידות? אם לא - הסבר מדוע, אם כן - מהן היחידות?

ג. חשב בדיוק הטוב ביותר האפשרי את השטח הכלוא בין הגרף לבין הציר האופקי בתחום מ- $e=0$ ל- $e=2kg^2m^3$ וציין את יחידותיו של הערך שמתקבל. פרט את שלבי הפתרון.

ד. איזו פעולה מתמטית דומה ביותר לפעולה אותה ביצעת בסעיף ג?

ה. נתון מחדש גרף של אותה פונקציה. ענה על סעיף ג' בעזרת הגרף החדש. מהי מסקנתך?



5. * שחקן הוקי חובט בדסקית בכוח שכיוונו אופקי קבוע וגודלו משתנה כפונקציה של הזמן בהתאם לביטוי: $F=600t-300t^2$ (F נמדד בניוטונים (N) ו- t בשניות (s)). מסת הדסקית היא 2000g .

א. בכל אחד משני המצבים הבאים, האם תנועת הדסקית שוות מהירות? הסבר.

(1) בזמן הפעלת הכוח.

(2) אחרי שהכוח חדל לפעול.

ב. האם התנע של הדסקית משתנה במקרים הבאים? הסבר תשובותיך.

(1) בזמן הפעלת הכוח.

(2) אחרי שהכוח חדל לפעול.

ג. האם למקדמים 600 ו- 300 המופיעים בביטוי המתמטי יש יחידות מדידה? אם כן מהן?

ד. שרטט גרף של הכוח הפועל על הדסקית כפונקציה של הזמן מרגע $t=0$ ועד $t=2s$, כך שהגרף יתפרס על מחצית הדף של מחברתך בגודל A4. הסבר כיצד קבעת את קנה המידה בכל ציר של הגרף וציין את הערכים של כל הנקודות החשובות.

ה. חשב את המתקף שפעל על הדסקית מרגע $t=1s$ ועד רגע $t=2s$ בשתי דרכים:

(1) ע"י חישוב <u>שטח</u> מתאים. הסבר צעדיך.

(2) ע"י הפעולה המתמטית הנדרשת. פרט חישובך.

ו. לאיזה גודל פיזיקאלי אחר שוות התוצאות שקיבלת בסעיף ה'? הסבר תשובתך.

ז. אילו השחקן היה מצליח להפעיל כוח קבוע במשך אותו פרק הזמן שאליו מתייחס סעיף ה' כך, שיגרום לאותו מתקף, כיצד היה אז נראה גרף הכוח כפונקציה של הזמן? הוסף את הגרף החדש בצבע אחר באותה מערכת צירים בה השתמשת בסעיף ד', והסבר מה משותף לשני הגרפים ומה מבדיל ביניהם.

ח. במקרה אחר הדסקית נעה על פני משטח קרח חלק, לקראת השחקן, במהירות קבועה של $15\ m/s$. השחקן חובט בדסקית בכוח שגודלו משתנה כפונקציה של הזמן בהתאם לאותו ביטוי שנתון בתחילת תרגיל זה והוא פועל במשך שנייה אחת. אחרי החבטה הדסקית נעה בזווית 30^0 ביחס לכיוון המנוגד לכיוון המקורי של תנועתה. מהו גודל מהירות הדסקית מיד אחרי תום החבטה, ובאיזה כיוון הפעיל המחבט כוח על הדסקית? מומלץ לפתור בדרך גיאומטרית על ידי שימוש במשפט סינוסים ומשפט הקוסינוסים במשולש.

6. פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א.
$$5\cdot x - y = 3$$
$$5\cdot y - x = -3$$

ב.
$$5\cdot u_1\cdot\cos 30^\circ + 3u_2\cdot\cos 20^\circ = 6$$
$$5\cdot u_1\cdot\sin 30^\circ - 3\cdot u_2\cdot\sin 20^\circ = 0$$

7. ** שני גופים, 1 ו- 2, נעים במישור אופקי כך ששקול הכוחות הפועלים על מערכת הגופים שווה לאפס בכל רגע ורגע. ברגע מסוים מתחילה אינטראקציה בין הגופים והיא מסתיימת אחרי זמן מה.

נסמן את הווקטור המייצג את התנע ההתחלתי של גוף 2 כהרף עין לפני האינטראקציה ב- $\vec{p}_{2_0}$ ואת הווקטורים המייצגים את התנעים של אותם גופים כהרף עין אחריה ב- $\vec{p}_1$ ו- $\vec{p}_2$.

א. מהי משמעות המשפט "שני הגופים מהווים מערכת סגורה"? האם המערכת הנתונה סגורה?

ב. שרטט מערכת צירים קרטזית וברביע הראשון שלה שרטט את וקטור התנע ההתחלתי של גוף 2 כהרף עין לפני האינטראקציה, $\vec{p}_{2_0}$, אם ידוע שרכיביו הם $3kg\cdot\frac{m}{s}$ בציר x ו- $-4N\cdot s$ בציר y.

ג. הראה שיחידות המדידה של הרכיבים בסעיף ב' הן זהות.

ד. שרטט במערכת צירים קרטזית <u>אחרת</u> את שני וקטורי התנע הסופי של שני הגופים, $\vec{p}_1$ ברביע הראשון ו- $\vec{p}_2$ ברביע השני, אם ידוע שרכיביהם בציר x הם $-5kg\cdot\frac{m}{s}$ ו- $4kg\cdot\frac{m}{s}$ בהתאמה והרכיבים בציר y הם $-4kg\cdot\frac{m}{s}$ ו- $-1kg\cdot\frac{m}{s}$ בהתאמה.

ה. מצא את וקטור התנע ההתחלתי של הגוף הראשון, $\vec{p}_{1_0}$, בדרכים הבאות:

(1) על ידי מציאת וקטור המתקף.

(2) על ידי שימוש בחוק שימור התנע הכולל בצורה גיאומטרית.

(3) על ידי שימוש בחוק שימור התנע הכולל בכל אחד מהצירים.

<u>המלצה</u>: לצורך הפתרון בכל אחת מהדרכים הנ"ל צייר מחדש את הווקטורים הנתונים בשתי מערכות הצירים כפי שנדרש בסעיפים ב' ו- ד'.

ו. כיצד הייתה משתנית תשובתך לסעיף ה', אילו היית משרטט את וקטורי התנע הנתונים ברבעים אחרים? הסבר תשובתך.

8. * עגלה שמסתה 4 ק"ג נוסעת על משטח אופקי חלק במהירות קבועה של 6 מ'\ש'. גוש חמר שמסתו 1 ק"ג נופל חופשית ממנוחה מגובה 5 מ' אל תוך העגלה.

א. מהו שינוי בתנע של גוש החמר בכיוון אנכי?

(1) מרגע שחרורו עד כ"הרף עין" לפני פגיעתו בעגלה.

(2) מ"הרף עין" לפני פגיעתו בעגלה עד "הרף עין" אחרי פגיעתו בעגלה.

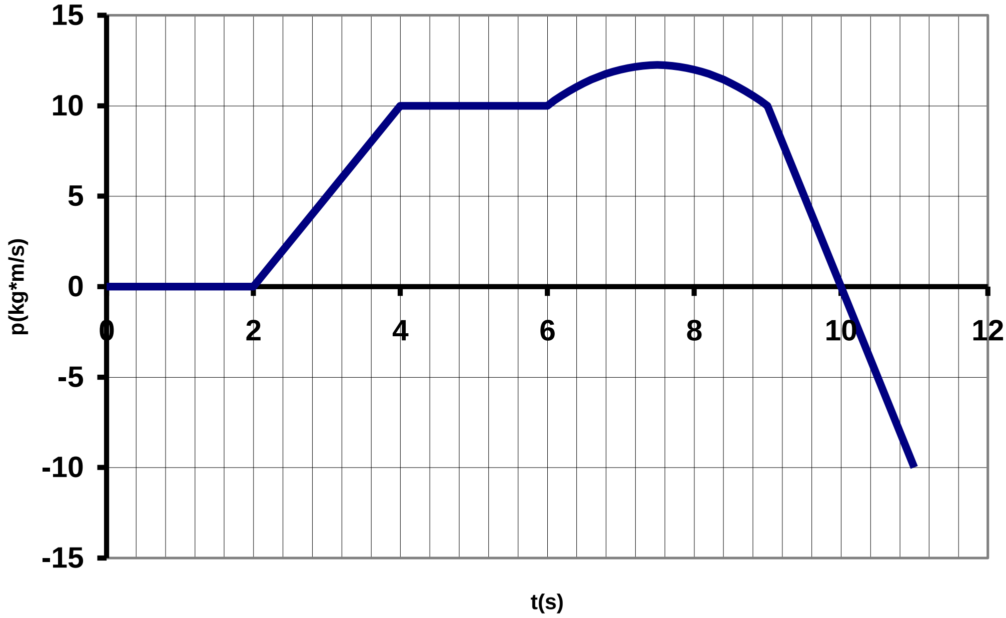
ב. מהו שינוי בתנע של גוש החמר בכיוון אופקי?

ג. מהו כיוון הכוח שגוש החמר הפעיל על העגלה?

ד. בהנחה שזמן האינטראקציה בין גוש החמר לבין העגלה היה חצי שנייה, חשב את גודל הכוח הממוצע שפעל על גוש החמר.

ה. הסבר את המושג "כוח ממוצע".

9. במעבדת הפיזיקה של NASA בנו מערכת אשר מסוגלת למדוד את התנע של גופים. אחד ממרכיבי המערכת מתחבר לגוף ומעביר אותות חשמליים למחשב דרך מגדל קליטה.
עקבו באמצעות מערכת זאת אחרי תנועת גוף במסלול ישר. על צג המחשב התקבל גרף תנע כפונקציה של הזמן:



מרגע t=6s ועד לרגע t=9s הגרף הוא חלק של פרבולה, שאר הקטעים הם קווים ישרים.

א. תאר במילים את אופי תנועת הגוף בכל אחד מהקטעים הרלוונטיים.

ב. חשב את שיפוע המשיק לגרף ברגעים t = 1s ,3s ,5s ,7s ,7.5s ,8s ,10s ,11s. פרט צעדיך.

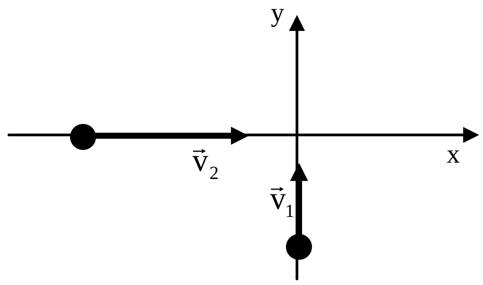
ג. חשב את הכוח השקול שפועל על הגוף ברגעים t = 1.5s , 3.5s , 5.5s , 7.5s , 9.5s , 10.5s.

ד. כפי שנראה בגרף, ברגע t = 10s תנע הגוף מתאפס. האם ברגע זה פועל על הגוף כוח? אם לא הסבר מדוע, אם כן חשב אותו.

ה. מתי פועל על הגוף הכוח השקול הגדול ביותר? הסבר.

ו. באיזה רגע כיוון פעולתו של הכוח משתנה (אם בכלל)? נמק תשובתך.

10. ** שני גופים בעלי מסות זהות נעים על פני מישור אופקי חסר חיכוך בכיוונים מאונכים.



הגופים מתנגשים פלסטית זה בזה. נתון שיחס גדלי מהירויות הגופים לפני ההתנגשות הוא $\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{4}$.

א. השלם את התרשים הנתון, כך שיתאר גם את מצב המערכת לאחר ההתנגשות.

ב. מצא את כיוון תנועת הגופים אחרי ההתנגשות.

ג. מצא את כיוון הווקטור שינוי בתנע הגוף הראשון.

ד. חשב באיזה כיוון פעל המתקף על הגוף השני בעת ההתנגשות?

ה. חשב באיזה כיוון פעל הכוח הממוצע על הגוף הראשון בעת ההתנגשות?

ו. כיצד הייתה משתנה תשובתך לסעיף ב', אילו יחס המסות של שני הגופים היה $\frac{m_1}{m_2}=\frac{4}{3}$?

ז. פתור מחדש את סעיף ג' בהנחה שלשני הגופים מסות שוות ויחס מהירויותיהם לפני ההתנגשות הוא $\frac{v_1}{v_2}=\frac{b}{c}$. הסק מסקנה.

תשובות לתרגילים

1. א. 18 יחידות
   ד. 2 יחידות
   ה. יחידות 20בכיוון השלילי

2. א. כן
   ג. לא

3. כן

4. ב. $s \cdot kg^{-2} \cdot m^{-4}$
   ג. $\approx 11.88 kg^2 \cdot m^2 \cdot s$
   ה. $\approx 11.6 kg^2 \cdot m^2 \cdot s$

5. ה. (2) $200 N \cdot s$
   ז. $100N$
   ח. $40.78 m/s$, 44.94^o

6. א. (0.5, -0.5)
   ב. $u_1 = 0.535$, $u_2 = 1.305$

7. ה. $4.12 kg \cdot \frac{m}{s}$, 14^o

8. א. (1) $10 m/s$ בכיוון מטה
   (2) $10 kg \cdot \frac{m}{s}$ בכיוון מעלה
   ב. $4.8 kg \cdot \frac{m}{s}$
   ג. 64.4^o יחסית ל...
   ד. $22.18N$

9. ב. 0
   5N
   0
   1.11N
   0
   -1.11N
   -10N
   -10N

10. ב. 36.87^o ביחס ל ....
    ג. 36.87^o יחסית ל.....
    ו. 45^o

פרק ז – אנרגיה מכנית ושימורה

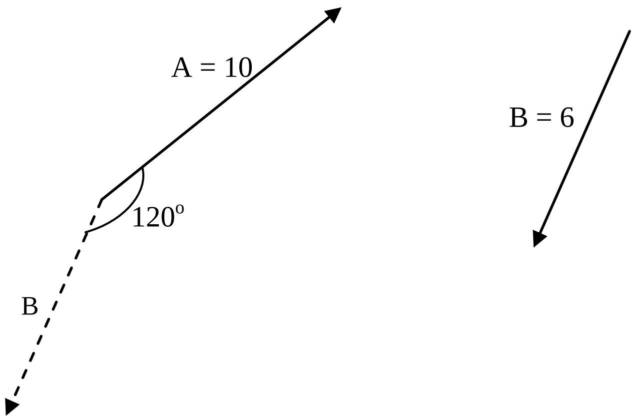
מושגים מתמטיים – מכפלה סקלרית של וקטורים, אינטגרל מסוים, יישור גרף של פונקציה לא לינארית, זווית היקפית הנשענת על קוטר.

קשר לעולם הפיזיקה – עבודתו של כוח קבוע ושל כוח משתנה, אנרגיה קינטית, משפט "עבודה-אנרגיה".

1. נושאים מתמטיים

1.1 מכפלה סקלרית של שני וקטורים

- בין שני וקטורים ניתן לבצע שני סוגים של מכפלות - מכפלה סקלרית, שתוצאתה היא סקלר (מספר חיובי או שלילי) ומכפלה וקטורית, שתוצאתה היא וקטור.
- מכפלה סקלרית בין שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מסומנת $\vec{A}\cdot\vec{B}$, להבדיל ממכפלה וקטורית שמסומנת $\vec{A}\times\vec{B}$.
- אנו נעסוק במכפלה הסקלרית בלבד.
- המכפלה הסקלרית של שני וקטורים שווה למכפלה של גודל הווקטור הראשון בגודל הווקטור השני ובקוסינוס הזווית בינם: $\vec{A}\cdot\vec{B}=A\cdot B\cdot\cos\alpha$.
- כדי לקבוע זווית בין שני וקטורים יש להעתיקם כך שיתחילו מנקודה משותפת.



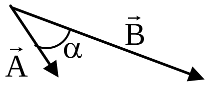
תרשים 1 - שני וקטורים מסודרים לחישוב מכפלה סקלרית

- המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים המוצגים בתרשים 1:

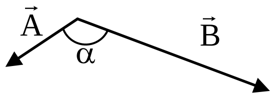
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=10\cdot 6\cdot\cos 120^{\circ}=-30$$

<u>הערה:</u> לצורך החישוב מקובל להתחשב בזווית הקטנה בין שני הווקטורים, למרות שלזווית הגדולה, שהיא 240^{o}, אותו קוסינוס.

- סימן המכפלה הסקלרית של שני וקטורים יכול להיות חיובי או שלילי, לפי סוג הזווית ביניהם – חדה או קהה, בהתאמה (תרשים 2).



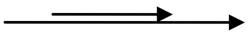
$\alpha < 90^o \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} > 0$

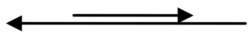


$\alpha > 90^o \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} < 0$

תרשים 2 - הסימן של מכפלה סקלרית

- מקרים פרטיים של מכפלה סקלרית מוצגים בתרשים 3:

א.  $\alpha = 0^o \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B$

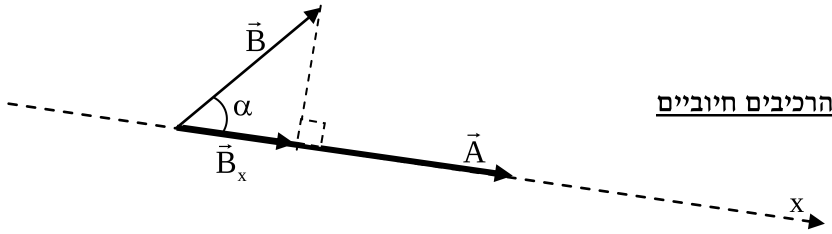
ב.  $\alpha = 180^o \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = -A\cdot B$

ג.  $\alpha = 90^o \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

תרשים 3 - מקרים פרטיים של מכפלה סקלרית

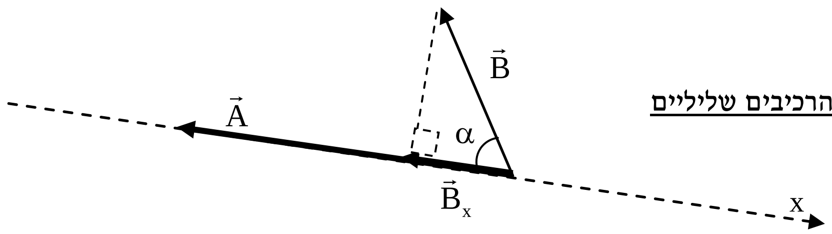
- לצורך חישוב המכפלה הסקלרית של שני וקטורים, נוח לבחור ציר אחד בכיוון אחד הווקטורים , כך שהמכפלה הסקלרית שווה למכפלה בין רכיבי שני הווקטורים על הציר הנבחר (תרשים 4) – ראה גם את המקרים הפרטיים המוזכרים לעיל.

<u>שני הרכיבים חיוביים</u>



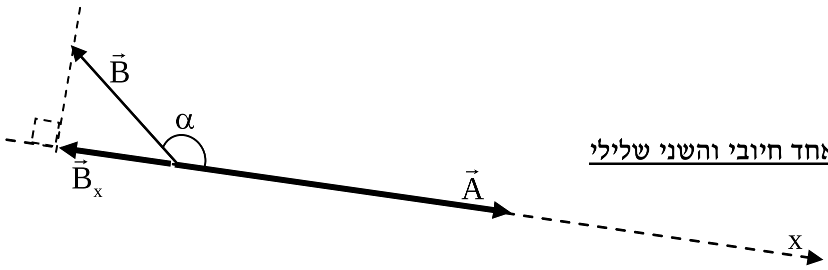
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos\alpha = \vec{A}_x\cdot\vec{B}_x = A\cdot B_x > 0$$

<u>שני הרכיבים שליליים</u>



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos\alpha = \vec{A}_x\cdot\vec{B}_x = (-A)\cdot(-B_x) > 0$$

<u>רכיב אחד חיובי והשני שלילי</u>

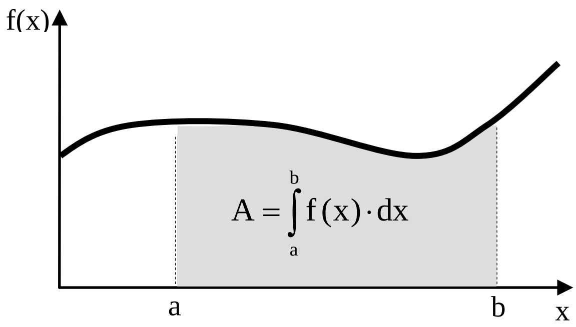


$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos\alpha = \vec{A}_x\cdot\vec{B}_x = A\cdot(-B_x) < 0$$

תרשים 4 - שימוש ברכיבים לחישוב המכפלה הסקלרית

1.2 **אינטגרל מסוים של פונקציה** - הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

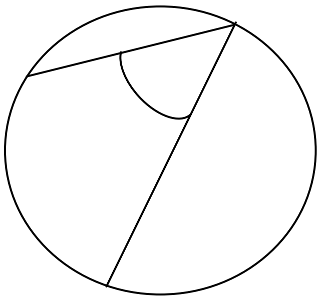
- <u>בעזרת אינטגרל המסוים</u> אפשר לחשב שטח שבין גרף פונקציה לבין ציר המשתנה הבלתי תלוי.



תרשים 5 - השטח המחושב באמצעות אינטגרל מסוים

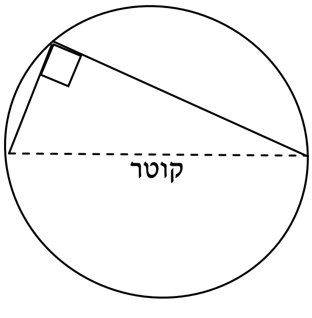
1.3 **זווית היקפית הנשענת על קוטר**

- זווית היקפית במעגל נוצרת בין שני מיתרים, המתחילים מאותה נקודה שעל היקפו (תרשים 6).



תרשים 6 - זווית היקפית

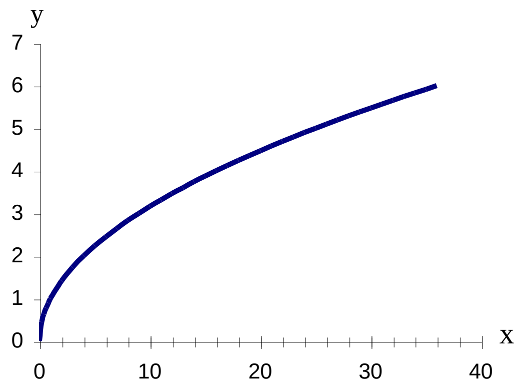
- בתרשים 7 מופיע מקרה פרטי של זווית היקפית הנשענת על קוטר. זווית כזאת הינה ישרה.
- אם הזווית ההיקפית היא של 90^o, בין המיתרים שהם צלעות הזווית לבין הקוטר מתקיים קשר לפי משפט פיתגורס.



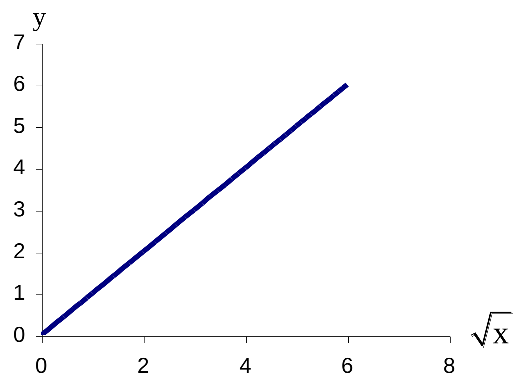
תרשים 7 - זווית היקפית ישרה

1.4 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית

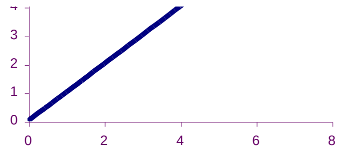
- יישור הוא פעולה שמאפשרת לקבל פונקציה קווית (לינארית) מפונקציה לא לינארית, על ידי החלפת אחד משני המשתנים במשתנה חדש.
- המשתנה החדש מתקבל מהמשתנה הקודם על ידי הפעלה של אחת הפעולות המתמטיות, כמו חזקה, או שורש.
- לדוגמה, אם נתונה הפונקציה $y=\sqrt{(x)}$, אשר הגרף שלה איננו ישר (תרשים 8), היישור (כלומר גרף קו ישר) מתקבל בהתאם לתבנית חדשה $y=(\sqrt{x})$ (תרשים 9). בין הסוגריים רשום המשתנה הבלתי תלוי שמשמש לבניית כל גרף.



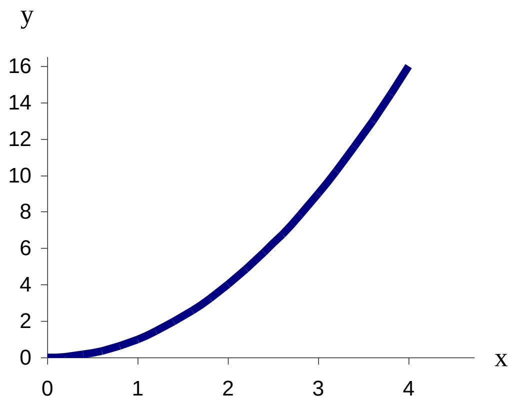
תרשים 8 - גרף הפונקציה y=f(x)
כאשר $f(x)=\sqrt{x}$



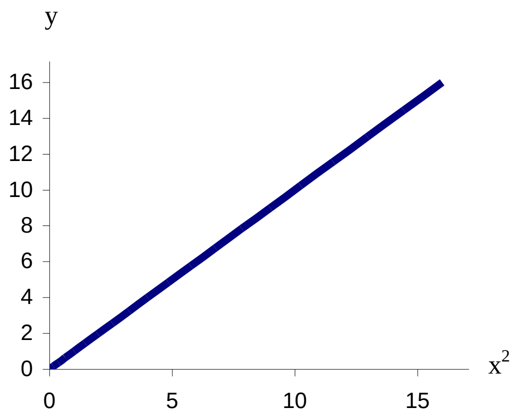
תרשים 9 - גרף הפונקציה y=f(x*)
כאשר $x^*=\sqrt{x}$



מאידך, אם נתונה הפונקציה $y=nx^2$, כלומר $=n(x)^2$
(תרשים 10), היישור מתקבל בהתאם לתבנית חדשה (x^2)
בין הסוגריים רשום המשתנה הבלתי תלוי שמשמש לבניית כל גרף.



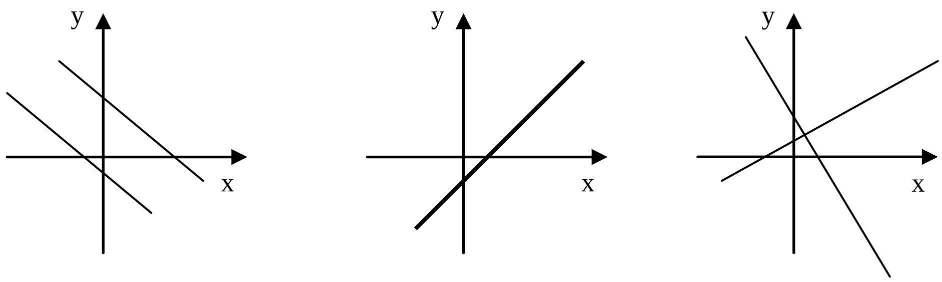
תרשים 10 - גרף הפונקציה y=f(x)
כאשר $f(x)=(x)^2$



תרשים 11 - גרף הפונקציה y=f(x*)
כאשר $x^*=(x^2)$

1.5 מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים

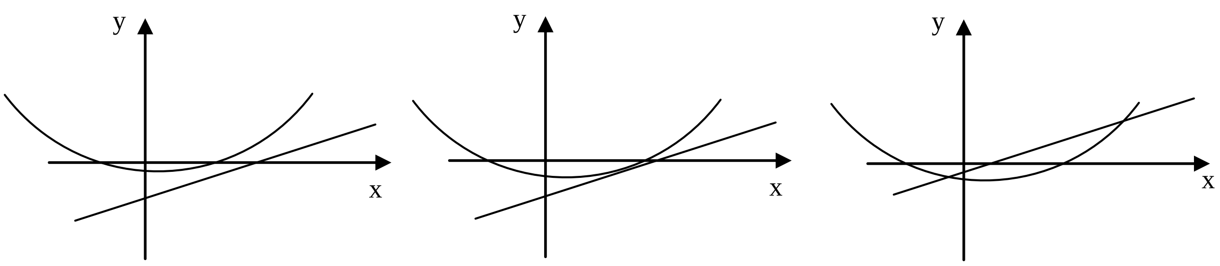
- בפרק זה מופיעות מערכות של שתי משוואות עם שני נעלמים, כאשר או ששתי המשוואות הן ממעלה ראשונה, או שאחת המשוואות היא ממעלה השנייה.
- כל משוואה עם שני נעלמים x ו- y מייצגת קו במערכת צירים x,y .
- פתרון מערכת המשוואות הוא זוג ערכים מספריים עבור שני המשתנים x ו- y . הצבת שני ערכים אלה בכל אחת מהמשוואות הופכת אותה לפסוק אמת.
- אם למערכת המשוואות יש פתרון, אזי הוא מורכב משיעורי נקודת החיתוך בין שני הקווים.
- כל משוואה ממעלה ראשונה מייצגת קו ישר במערכת צירים x,y .
- ישנן שלוש שיטות לפתרון מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים: שיטת ההצבה, שיטת השוואת המקדמים והשיטה הגרפית.
- מספר פתרונות של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה: פתרון יחיד - ישרים נחתכים, אינסוף פתרונות - ישרים מתלכדים, או אף פתרון - ישרים מקבילים (תרשים 12).



ישרים נחתכים ישרים מתלכדים ישרים מקבילים

תרשים 12

- אם אחת ממשוואות המערכת היא ממעלה שנייה, ישנן רק שתי שיטות לפתרון: שיטת ההצבה והשיטה הגרפית.
- כל משוואה ממעלה שנייה מייצגת פרבולה במערכת צירים x,y .
- מספר פתרונות של מערכת שתי משוואות כאשר אחת מהן ממעלה שנייה: שני פתרונות, פתרון יחיד או אף פתרון (תרשים 13).



שני פתרונות פתרון יחיד אף פתרון

תרשים 13

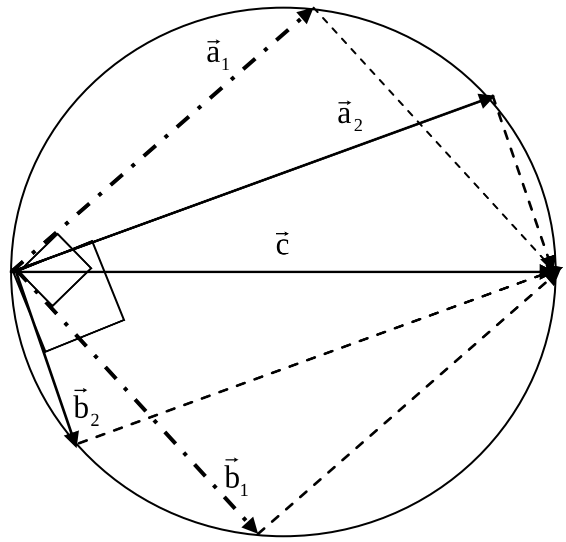
2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

- עבודה של כוח $\vec{F}$ לאורך העתק $\Delta\vec{r}$ היא המכפלה הסקלרית של שני וקטורים אלה:

$$W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha$$

- אם בפתרון של מערכת שתי משוואות עם שני נעלמים, כאשר אחת המשוואות ממעלה ראשונה והשנייה ממעלה השנייה, מתקבלים שני זוגות של פתרונות, יש לבדוק את משמעותם הפיזיקלית ולפסול את הפתרון הלא מתאים במידת הצורך.
- אם נתונים שני וקטורים משתנים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$, כך שסכומם הווקטורי הוא וקטור קבוע $\vec{c}$, ובין הגדלים שלהם מתקיים קשר לפי משפט פיתגורס, אזי שני הווקטורים המשתנים יוצרים תמיד זווית ישרה.

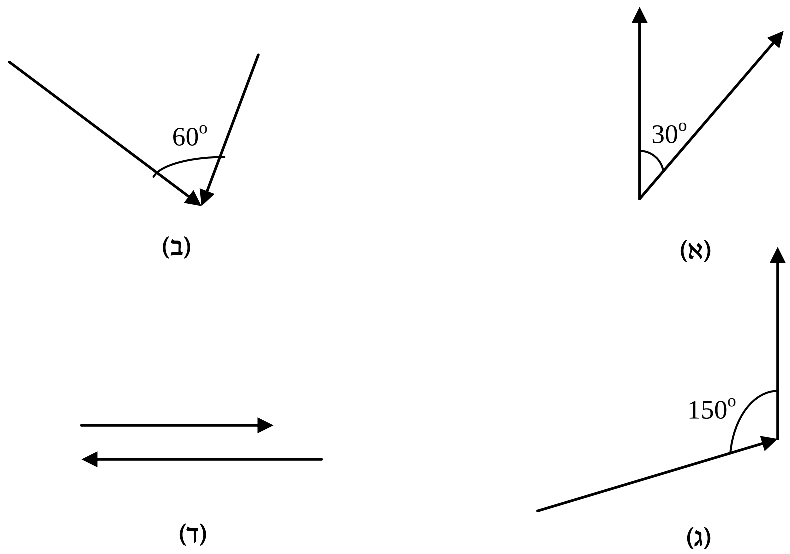
$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = c^2$$



תרשים 14 - שני וקטורים משתנים מאונכים, בעלי סכום קבוע

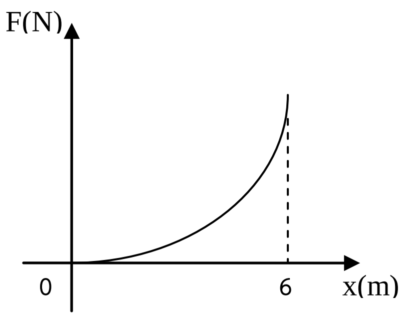
3. תרגילים

1. בכל אחד מהמקרים הבאים נתונים שני וקטורים. חשב בכל מקרה את המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים, אם לאחד מהם גודל של 5 יחידות אורך ולשני - 6 יחידות אורך. פרט צעדיך.



2. גוף נע שמאלה על משטח אופקי ועליו פועל כוח קבוע בגודלו, בן 50 ניוטון, אך כיוונו משתנה כדלקמן: לאורך 2 המטרים הראשונים הכוח פועל בכיוון תנועתו של הגוף; לאורך 3 מטרים נוספים הכוח פועל בכיוון אנכי מטה; לאורך 4 מטרים נוספים כיוון פעולתו של הכוח יוצר זווית 120^o עם כיוון תנועת הגוף; ב- 5 המטרים האחרונים הכוח פועל בזווית 40^o מתחת לאופק, ימינה.
   א. מהי העבודה שנעשית על-ידי הכוח הנתון לאורך כל המסלול?
   ב. אילו על הגוף היה פועל לאורך אותו מסלול של 14 מ' כוח קבוע שגודלו 35 ניוטון, באיזו זווית היה עליו לפעול כדי שעבודתו תשתווה לעבודה אותה חישבת?

3. * על גוף פועל כוח בכיוון תנועתו, שגודלו משתנה במהלך התנועה לפי הפונקציה $F_1(x) = 5x^2 - 3x$. הגרף הבא מייצג את הפונקציה:



   א. מהי העבודה שנעשית על ידי הכוח לאורך שישה המטרים הראשונים?
   ב. מהו גודלו של כוח קבוע שהיה צריך לפעול על הגוף, כדי לבצע אותה עבודה לאורך אותו מרחק? כיצד מכונה כוח זה?
   ג. על הגוף פועל עתה כוח אחר $\vec{F}_2$ באותו כיוון כמו $\vec{F}_1$, אבל גודלו משתנה ביחס ישר ל- x. הוסף לאותה מערכת צירים גרף שמייצג את גודלו של $\vec{F}_2$ כתלות ב- x , אם ידוע שלאורך אותו מרחק של 6m כוח זה מבצע אותה עבודה כמו $\vec{F}_1$.

4. * תלמיד בדק את תנועתו של כדור הנזרק כלפי מעלה. בעזרת מכשירי מדידה מיוחדים הצליח התלמיד למדוד את מהירותו של הכדור ב- 13 נקודות שונות במהלך תנועתו ולחשב את האנרגיה הקינטית של הגוף בכל נקודה. תוצאות הניסוי מתוארות בטבלה הבאה:

$E_k(J)$	$v\left(\frac{m}{s}\right)$	
0	0	
2.5	1	
10	2	
22.5	3	
40	4	
62.5	5	
90	6	
2.5	-1	
10	-2	
22.5	-3	
40	-4	
62.5	-5	
90	-6	

א. שרטט גרף של האנרגיה הקינטית של הגוף כפונקציה של מהירותו. איפה במסלול התנועה מהירות הכדור היא אפס?

ב. האם ניתן לדעת מהו כיוון ציר המקום שנבחר ע"י התלמיד?

ג. במידה והינך יודע לבצע גזירה של פונקציה, קבע מהי המשמעות הפיזיקלית של שיפוע המשיק לגרף שצירת.

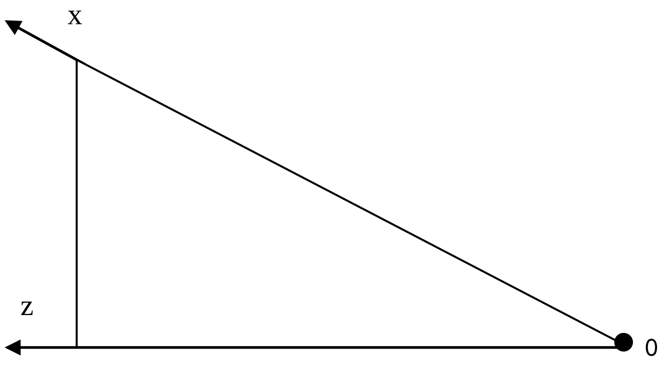
ד. בחר משתנה חדש כך שתלות האנרגיה הקינטית במשתנה זה תהיה לינארית.

ה. מלא בטבלה הנתונה את העמודה הריקה עם הערכים של המשתנה החדש שבחרת בסעיף ג', כולל שם המשתנה החדש ויחידותיו.

ו. שרטט את הגרף הלינארי בהתאם לסעיפים ג' ו- ד' וחשב בעזרתו את המסה של הכדור הנופל. פרט את צעדיך.

ז. הסבר מדוע הגרף שציירת בסעיף א' משתרע על שני רבעים, אולם הגרף החדש משתרע רק על רביע אחד?

5. * על פני מדרון מוצב ציר x שראשיתו בנקודה 0 (כמתואר בתרשים) וכיוונו במעלה המדרון. תלמיד סימן על פני המדרון עוד 9 נקודות נוספות ומצא את מיקומן. בעזרת אנך בנאים, מצא התלמיד את הגובה של כל אחת מהנקודות הנ"ל ביחס לבסיס המדרון. את תוצאות המדידות הוא הכניס לטבלה הבאה:



מספר הנקודה	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
מיקום x(cm)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
גובה h(cm)	0	2.4	4.2	6.8	9.6	12	14.4	16.8	19.2	21.6

א. שרטט גרף של גובה h כפונקציה של המיקום x ומצא <u>על פי הגרף</u> את זווית השיפוע של המדרון.

התלמיד החליט למצוא את מקומה האופקי של כל אחת מהנקודות ביחס לנקודת הראשית.

ב. הוסף לטבלה המקורית עוד עמודה אחת עם כתובת מיקום אופקי z(cm) ומלא אותה. הסבר כיצד חישבת את הערכים המתאימים.

ג. רשום ביטוי לפונקציה המקשרת בין גובה הנקודה לבין מיקומה האופקי. העזר בתוצאות של סעיף א.

ד. זורקים במעלה המדרון החלק ששיפועו α, גוף קטן שמסתו m במהירות v_0. בטא את האנרגיה הפוטנציאלית של גובה באמצעות מרחקו האופקי ושאר נתוני השאלה.

ה. בטא באמצעות נתוני השאלה את האנרגיה הקינטית של הגוף במהלך תנועתו כפונקציה של המיקום האופקי z.

ו. (1) שרטט גרף המייצג את תלות האנרגיה הקינטית של הגוף הנזרק במעלה המדרון כפונקציה של <u>מיקומו האופקי</u> z. הסבר את דרכי פעולתך.

(2) הסבר את צורת הגרף שהתקבל ואת המשמעויות הפיזיקליות של שיפוע הגרף או המשיק אליו ושל נקודות חיתוך הגרף עם הצירים.

6. נתונים שני חוטים. אורך של כל אחד מהם הוא ℓ. החוטים קשורים לנקודה אחת משותפת. אחד מהחוטים הוא אנכי והשני נטוי ביחס לראשון בזווית α.

א. בטא באמצעות נתוני השאלה את ההפרש האנכי בין נקודות הקצה של שני החוטים.

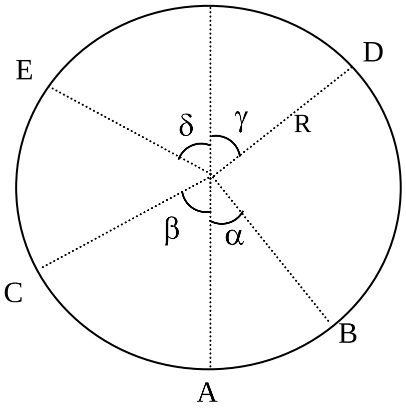
ב. בטא את היחס בין האורך ℓ לבין גובה התרוממותו של קצה החוט הנטוי.

ג. האורך ℓ גדול פי שלושה ממרחק העלייה האנכי של קצה החוט הנטוי. חשב את הזווית בין חוט זה לבין האנך.

ד. במקרה אחר החוט הנטוי יוצר עם האנך זווית בת 30^o. ממצב זה מגדילים את זווית הנטייה פי שניים. פי כמה גדל כתוצאה מכך גובה העלייה האנכי של קצה החוט?

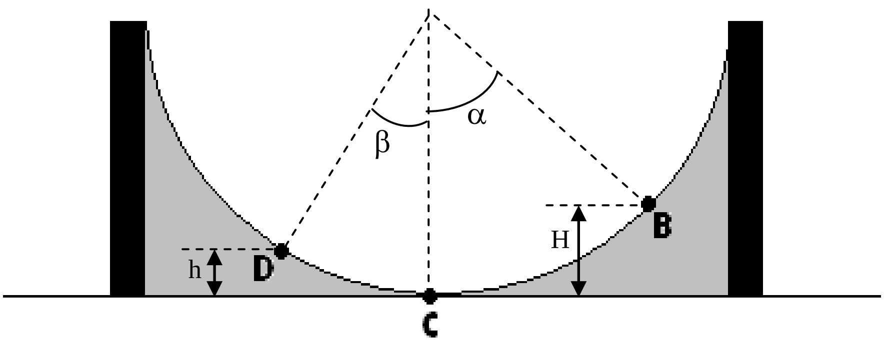
ה. מהי המסקנה הנובעת מהתוצאה שקיבלת בסעיף ד'?

7. נתון מעגל שרדיוסו R וחמש נקודות E ,D ,C ,B ,A על היקיפו. הזוויות בין הרדיוסים המתאימים לנקודות הנ"ל לבין האנך רשומות בתרשים.
בטא באמצאות הרדיוס והזוויות את הפרש הגבהים בין כל שתיים מהנקודות:



א. A ו- B.
ב. B ו- C.
ג. A ו- D.
ד. D ו- E.
ה. D ו- B.

8. * נתון מתקן לגולשי סקייטבורד. צורת המתקן היא חצי גליל שחתכו האנכי חצי מעגל. דני שיחרר את הסקייטבורד שלו, שמסתו m, בתוך המתקן מנקודה B הנמצאת בגובה H מעל לקרקע (ראה תרשים). מימדי הסקייטבורד זניחים יחסית לרדיוס המתקן.



א. פתח ביטוי למהירות הסקייטבורד בנקודה D, המסומנת בתרשים, באמצעות הגבהים H ו- h.

ב. רדיוס הגליל ששימש לבניית המתקן הוא 4m. ידוע שהזווית המרכזית α הנשענת על הקשת המעגלית BC היא בת 41^o. כמו כן, מהירות הסקייטבורד בנקודה D שווה ל- 3.25 m/s. חשב את היחס בין הזוויות α ו- β.

ג. מסת הסקייטבורד היא 0.6kg. בטא את אנרגיית הקשר של הסקייטבורד למתקן (האנרגיה המינימלית שיש להוסיף לסקייטבורד הנמצא במנוחה בתחתית המסלול, כדי שייצא מחצי הגליל).

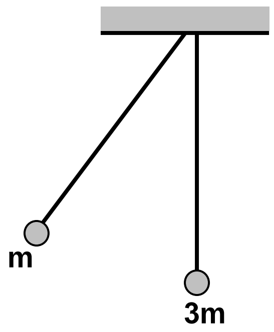
9. פתור את מערכות המשוואות הבאות:

(1) $2x^2+2y^2=80$
$3y-3x=12$

(2) $4x^2+4y^2=40$
$2x-4y=10$

(3) $2x^2+2y^2=26$
$3x+6y=21$

10. * נתונים שני כדורים שמסותיהם m ו-3m, התלויים על חוטים שאורכיהם שווים ל- 0.8m. כדור m הוסט בזווית $41.41°$ ביחס לאנך ושוחרר כך שהכדורים מתנגשים.



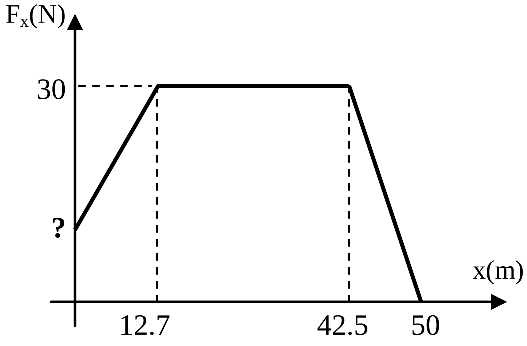
א. בהנחה שההתנגשות הייתה <u>פלסטית</u>, חשב את:
(1) גודל מהירות הכדורים כהרף עין לאחר ההתנגשות.
(2) הזווית שיוצרים שני החוטים עם הכיוון האנכי, כאשר הכדורים מגיעים לשיא הגובה.

ב. בהנחה שההתנגשות הייתה <u>אלסטית</u>, היעזר בנוסחאות הבאות (**<u>בלבד</u>**) :

E_{kT} לפני התנגשות $= E_{kT}$ אחרי התנגשות ; $\vec{p}_T$ לפני התנגשות $= \vec{p}_T$ אחרי התנגשות

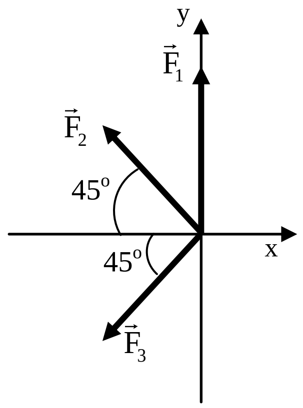
וחשב את:
(1) מהירויות הכדורים כ"הרף עין" לאחר ההתנגשות.
(2) היחס בין הגבהים המקסימאליים אליהם מגיעים הכדורים.
(3) הזוויות שבין כל אחד מהחוטים לכיוון האנכי כאשר הכדורים מגיעים לשיא גובהם.

11. * נתון גרף המתאר את גודלו של רכיב ה- x של כוח $\vec{F}$ הפועל על גוף מסוים, כתלות במיקום הגוף, x.



מסת הגוף 6000gr. בנקודה $x_0=0$ הגוף במנוחה, ובנקודה x=50m מהירותו היא v=2100cm/s.

חשב את רכיב ה- x של הכוח ההתחלתי $\vec{F}_0$ שפעל על הגוף בראשית דרכו בנקודה $x_0=0$.



12. בתרשים מופיעים שלושה וקטורים המייצגים את הכוחות הפועלים על גוף נקודתי שמסתו m=1.5kg . גדלי הכוחות הם F_1=40N , $F_2 = F_3 = \frac{30}{\sqrt{2}}$ N . ברגע t=0 הגוף נע במהירות של 4m/s בכיוון הכוח השקול. שלושת הכוחות קבועים במהלך תנועת הגוף.

א. חשב את וקטור הכוח השקול שפועל על הגוף.

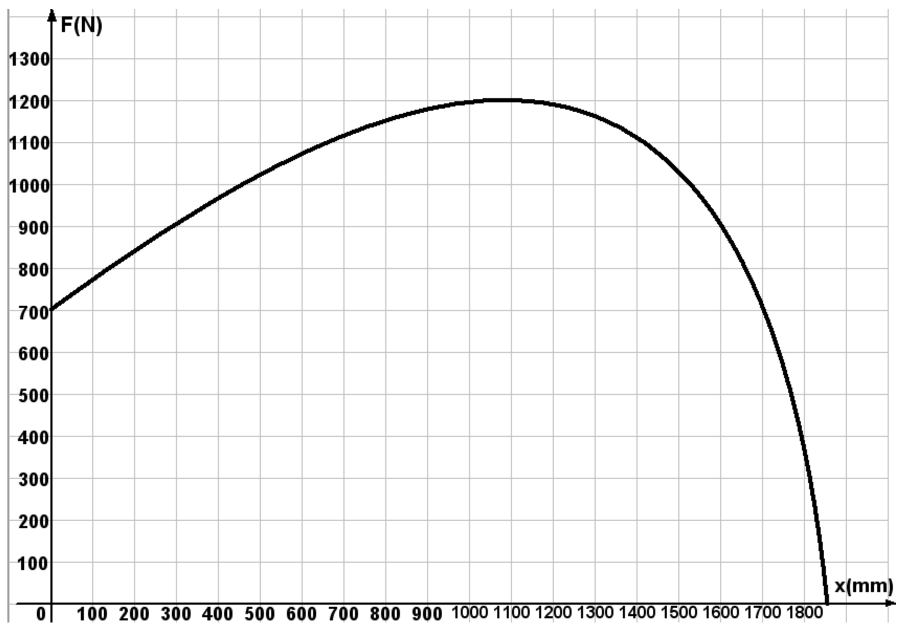
ב. חשב את עבודת הכוח השקול כאשר הגוף עובר קטע באורך 0.74m. מהי האנרגיה הקינטית של הגוף בתום מרחק זה?

ג. מצא את הכוח הקבוע שצריך היה להוסיף לכוחות הנתונים, החל מ- t=0, כך שמהירותו בנקודה x = 74cm תהיה אפס . פתור באמצעות משפט "עבודה-אנרגיה".

ד. במקרה אחר, על הגוף פועלים אותם כוחות, אך המהירות ההתחלתית שלו היא בכיוון מנוגד לכוח השקול. חישוב ללא טעויות, המבוסס על המשפט "עבודה-אנרגיה", מוביל לערך שלילי של האנרגיה הקינטית בנקודה שמרחקה מהמקום ההתחלתי 74 ס"מ. מה מסיקים מתוצאה זאת לגבי תנועת הגוף?

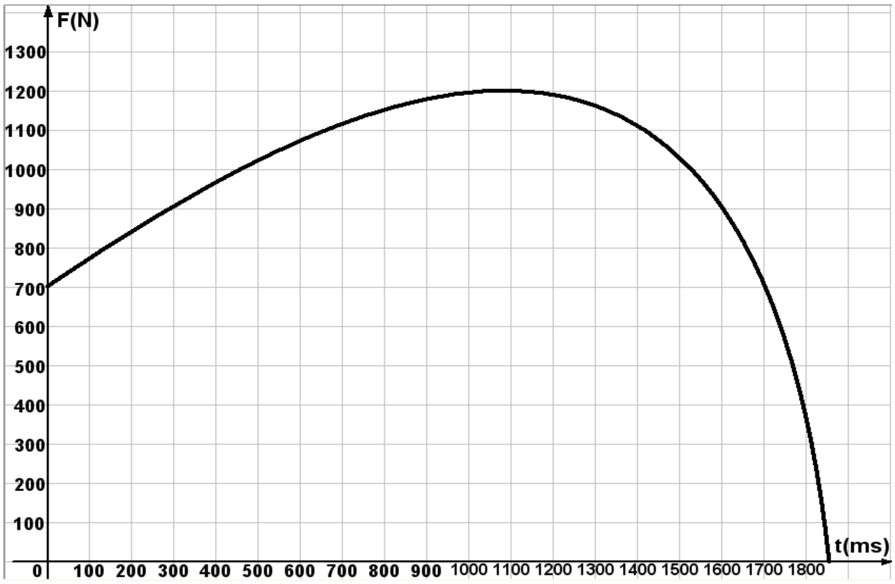
13. * שני מתאבקי סומו בדרגת יאקזונה בליגת העל החלו להיאבק. במהלך המאבק, החל אחד מן השניים לדחוף את השני בכיוון גבולות הזירה, עד שהעיף אותו אל מחוץ לזירה. מצלמות הווידיאו של הטלוויזיה היפנית תיעדו את קרב הסומו ובעזרת התיעוד נבנו שני גרפים.

א. נתון הגרף המתאר את גודל הכוח שהפעיל מתאבק אחד על השני כפונקציה של המרחק אותו עבר כל אחד מהמתאבקים במהלך הדחיפה (הערה: החיכוך בין רגלי המתאבק הנדחף למשטח הזירה זניח ביחס לכוח שמפעיל עליו המתאבק השני).



חשב בקירוב הטוב ביותר שהגרף מאפשר את העבודה הכוללת שביצע הכוח שבו מתאבק אחד דוחף את רעהו.

ב. בעזרת התיעוד נבנה גרף נוסף, המתאר את גודל הכוח שהפעיל לוחם סומו אחד על רעהו כפונקציה של הזמן, מהרגע (t=0s) שבו החל המתאבק האחד לדחוף את השני ועד רגע בו הוא העיף את רעהו מן הזירה.



בהנחה שלוחם הסומו שעליו פועל הכוח נע ממנוחה בקו ישר בהשפעת הכוח המתואר בגרף, הסבר במילים איזה נתון חסר, כדי לחשב בעזרת הגרף את מהירותו ברגע מסוים.

ג. אם ידוע שברגע t=1.6s מהירות אחד הלוחמים היא 10m/s, חשב את הנתון החסר עליו החלטת בסעיף הקודם.

14. * לקצה חוט שמסתו זניחה ואורכו 2m מחברים גוף קטן. קושרים את הקצה החופשי של החוט לקצה זרוע עם מלחציים המחוברים לכן ע"י תפסן. המלחציים אינם משנים את מיקומם. מעלים את הגוף כאשר החוט מתוח עד למצב בו גובה התרוממותו שווה למחצית אורך החוט.

א. מהי זווית הסטייה של החוט מהאנך? צייר תרשים מתאים.

משחררים את הגוף ממצבו המורם, ממנוחה.

ב. מהו אורך הקשת על פניה נע הגוף עד שהחוט מגיע למצבו האנכי?

מחברים למוט הכן תפסן נוסף מתחת לתפסן הראשון ואליו מחברים מוט אופקי. המוט האופקי נמצא במרחק 1/4 מאורך חוט מתחת לנקודת התלייה של החוט. לאחר מכן חוזרים על הפעולות המתוארות מעלה.

ג. מהי הזווית המקסימלית יחסית לאנך, אליה מגיע הכדור אחרי שהחוט נתקע במוט האופקי?

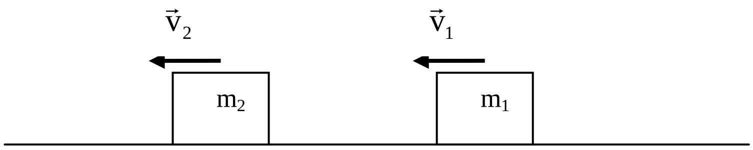
ד. האם בנקודה אליה מתייחס סעיף ג' יש לגוף תאוצה? הסבר זאת:
(1) משיקולים דינמיים.
(2) משיקולים קינמטיים.

ה. חשב את יחס מהירויות הגוף בזווית 30^o לפני ואחרי שהחוט נתקע במוט האופקי.

ו. חשב את יחס מהירויות הגוף בגובה $0.2m$ מעל הנקודה הנמוכה ביותר לפני ואחרי שהחוט נתקע במוט האופקי.

ז. באיזו זווית ביחס לאנך אחרי שהחוט נתקע במוט, שווה מהירות הגוף למהירותו כאשר החוט יוצר זווית 30^o ביחס לאנך לפני שנתקע במוט?

15. ** שני גופים שמסותיהם m_1 ו-m_2 נעים שמאלה על פני משטח אופקי חלק במהירויות קבועות, כמתואר בתרשים.



א. מהו התנאי לכך שתהיה התנגשות בין הגופים?

ב. אם מתקיים התנאי עליו החלטת בסעיף א' וההתנגשות היא אלסטית, רשום ביטויים המבטאים את שני חוקי השימור המתאימים במקרה זה.

ג. רשום את שני הביטויים שנדרשו בסעיף ב' עבור המקרה הפרטי בו הגוף m_2 היה במנוחה לפני ההתנגשות.

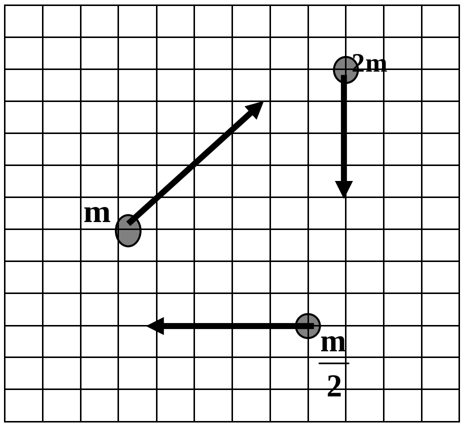
ד. בטא את מהירות הגוף בעל מסה m_1 אחרי ההתנגשות המתוארת בסעיף ג', באמצעות מסות הגופים והמהירות של גוף זה לפני ההתנגשות. מומלץ להשתמש בביטוי מתאים להתנגשות אלסטית חד-ממדית.

ה. איזו מסקנה נובעת מהתוצאה שקיבלת בסעיף ד' בכל אחד מהמקרים הבאים:

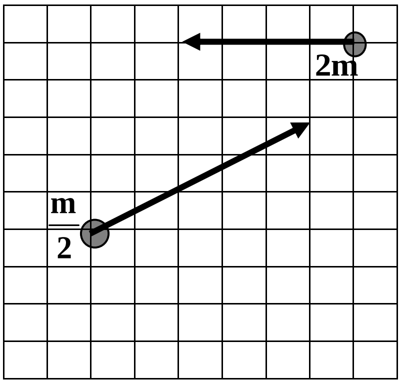
(1) המסת m_1 קטנה בהרבה מהמסה m_2 ($m_1 << m_2$),

(2) המסה m_2 קטנה בהרבה מהמסה m_1 ($m_1 >> m_2$).

16. ** מערכת מורכבת משלושה גופים הנעים על פני משטח אופקי חלק. התרשים שלפניך מתאר במבט על את וקטורי המהירות של כל אחד מהגופים. מסה של כל גוף מתוארת בתרשים א׳.
בתרשים ב׳ מופיעים שניים מהגופים וקטורים המייצגים את מהירויותיהם אחרי אירוע מסוים.



תרשים א׳



תרשים ב׳

א. הוסף לתרשים ב׳ את הגוף השלישי וכן וקטור המייצג את מהירותו החדשה, בהנחה שהאנרגיה המכנית של המערכת נשמרת.
ב. האם בסעיף א׳ יש תשובה אחת בלבד? אם כן - הסבר מדוע. אם לא - כמה תשובות יש לסעיף א׳?
ג. אילו האנרגיה החדשה של המערכת הייתה גדולה יותר מאשר האנרגיה המקורית, האם השינוי באנרגיה היה חיובי או שלילי? הסבר מה יש לעשות כדי לגרום להגדלת האנרגיה.

17. פתור את התרגילים הבאים:

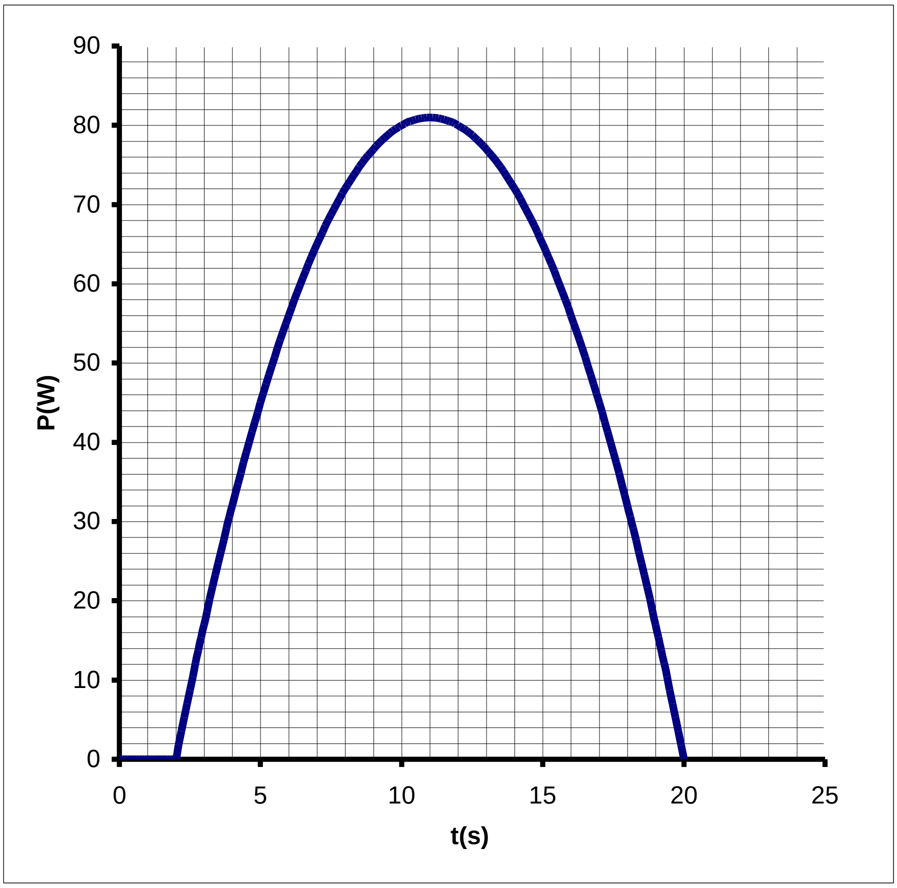
א. $27\% =$

ב. $\frac{60}{113} =$ ___ %

ג. 87% מ- x = ____________

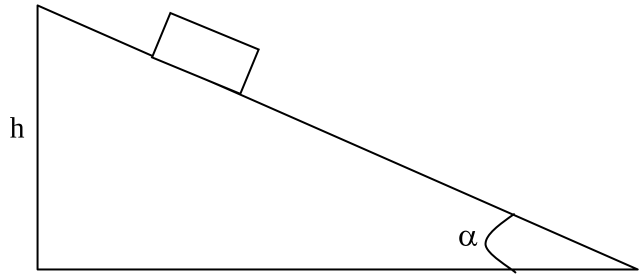
ד. $0.069y =$ _______% מ- ______

18. * הגרף שלפניך מתאר את ההספק הרגעי של הכוח השקול שפועל על גוף כפונקציה של הזמן.



א. חשב את הערך המספרי של השטח הכלוא בין הגרף לציר הזמן בדיוק הגבוה ביותר שהגרף מאפשר.
ב. מהן יחידות המדידה של התוצאה שקיבלת בסעיף א' ומהי המשמעות הפיזיקלית של תוצאה זו?
ג. הסבר את המושג "הספק ממוצע" ושרטט גרף המתאר את ההספק הממוצע בהתחשב בגרף הנתון.
ד. האם הספק חייב להיות חיובי או יכול להיות גם שלילי? הסבר.
ה. בהנחה שהכוח השקול הפועל על הגוף הוא קבוע, האם בפרק הזמן המופיע בגרף היה רגע בו מהירות הגוף הייתה מרבית? אם כן, מהו רגע זה? נמק תשובתך.

19. ** מעלים על פני מדרון שזווית שיפועו α, במהירות קבועה, גוף שמסתו m מבסיס המדרון עד לגובה h (ראה תרשים). בין הגוף לבין המדרון יש חיכוך קינטי שמקדמו μ. זמן עליית הגוף הוא t.



א. מהי העבודה שנעשית ע"י כל אחד מהכוחות שפועלים על הגוף? בטא תשובתך באמצעות נתוני השאלה.

ב. מהו ביטוי ההספק הממוצע של כל אחד מהכוחות?

ג. עבור העלייה המתוארת, בטא את הספק המושקע (P_{in}) ואת ההספק המופק (P_{out}).

ד. בטא את נצילות המדרון.

ה. אם זווית השיפוע של המדרון היא 30^o ונצילותו 68%, חשב את מקדם החיכוך הקינטי בין הגוף לפני המדרון.

תשובות לתרגילים

א. 25.98

ב. 15

ג. 25.98

ד. -30

2. א. $-191.5\ J$

ב. 113^o

3. א. $306J$

ב. $51N$

5. א. 36.87^o

ג. $h=0.75z$

ד. $U_G = m \cdot g \cdot z \cdot \tan\alpha$

ה. $E_k = \frac{m \cdot v_0^2}{2} - m \cdot g \cdot z \cdot \tan\alpha$

6. א. $\ell(1-\cos\alpha)$

ב. $\frac{1}{1-\cos\alpha}$

ג. 48.2^o

ד. 3.732

7. א. $R(1-\cos\alpha)$

ב. $R(\cos\alpha - \cos\beta)$

ג. $R(1+\cos\gamma)$

ד. $R(\cos\gamma - \cos\delta)$

ה. $R(\cos\alpha + \cos\gamma)$

8. א. $\sqrt{2g(H-h)}$

ב. 1.49

ג. $24J$

9. (1) (2 ,6) , (-6 ,-2)

(2) (-1 ,-3) , (3 ,-1)

(3) (-0.2 ,3.6) , (3 ,2)

10. א. (1) $0.5m/s$

(2) 10.15^o

ב. (1) $1m/s\ ;\ -1m/s$

(2) 1

(3) 20.36^o

11. $19.84N$

12. א. 126.87^o ,$50N$

ב. $37J$

ג. $49J$

ד. -53.13^o ,$66.22N$

13. א. $\approx 1805J$

ג. ... 158

14. א. 60^o

ב. $2.09m$

ג. 70.53^o

ה. 0.957

ז. 34.78^o

15. ה. (1) $u_1 = -v_1$

18. א. כ- 890

19. א. $mgh(1+\mu \cdot \cot\alpha)\ ;\ -mgh\ ;\ 0$

ג. $P_{out} = \frac{mgh(1+\mu \cdot \cot\alpha)}{t}\ ;\ P_{in} = \frac{mgh}{t}$

ה. 0.27

פרק ח – מודל הגז האידאלי

מושגים מתמטיים – פרופורציה, שטח, נפח, חיסור וקטורים, חזקות במעריך שלם, כתיב מדעי, ממוצע.

קשר לעולם הפיזיקה – לחץ, הקשר בין מתקף לתנע, אנרגיה קינטית ממוצעת.

1. נושאים מתמטיים

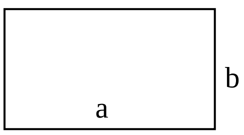
1.1 פרופורציה - הנושא הוצג לראשונה בפרק ב

- פרופורציה היא שיווין בין שתי מנות: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
- התכונה העיקרית של פרופורציה היא שמכפלות האיברים בכל אחד מהאלכסונים שווה, כלומר $a\cdot d=b\cdot c$.
- מהתכונה העיקרית נובע שניתן לנייד את האיברים בכל אלכסון, למשל מהפרופורציה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אפשר לקבל $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, או $\frac{a\cdot d}{b}=\frac{c}{1}$ $\left(\frac{a\cdot d}{b}=c\right)$, או $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.
- על ידי ניוד מתאים של איברים אפשר לבטא איבר אחד באמצעות שלושת האיברים האחרים.
- מפרופורציה נתונה אפשר לקבל פרופורציות אחרות על ידי חיבור\חיסור בין המכנים למונים, למשל מ- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אפשר לקבל $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$.

1.2 גיאומטריה

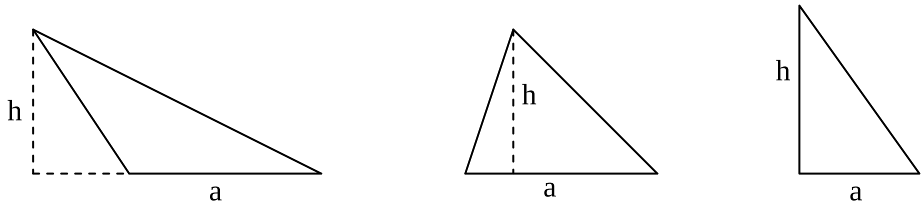
שטחים של צורות גיאומטריות

- שטח המלבן (תרשים 1) : $A=a\cdot b$



תרשים 1 - מלבן

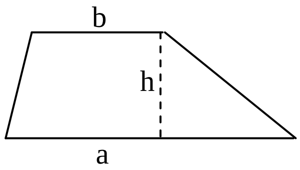
- שטח המשולש (תרשים 2) : $A = \dfrac{a \cdot h}{2}$



משולש ישר זווית   משולש חד זווית   משולש קהה זווית

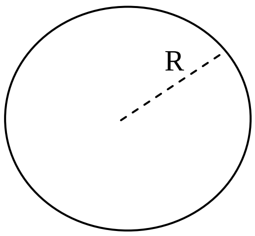
תרשים 2 - משולשים

- שטח הטרפז (תרשים 3) : $A = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$



תרשים 3 - טרפז

- שטח העיגול (תרשים 4) : $A = \pi \cdot R^2$



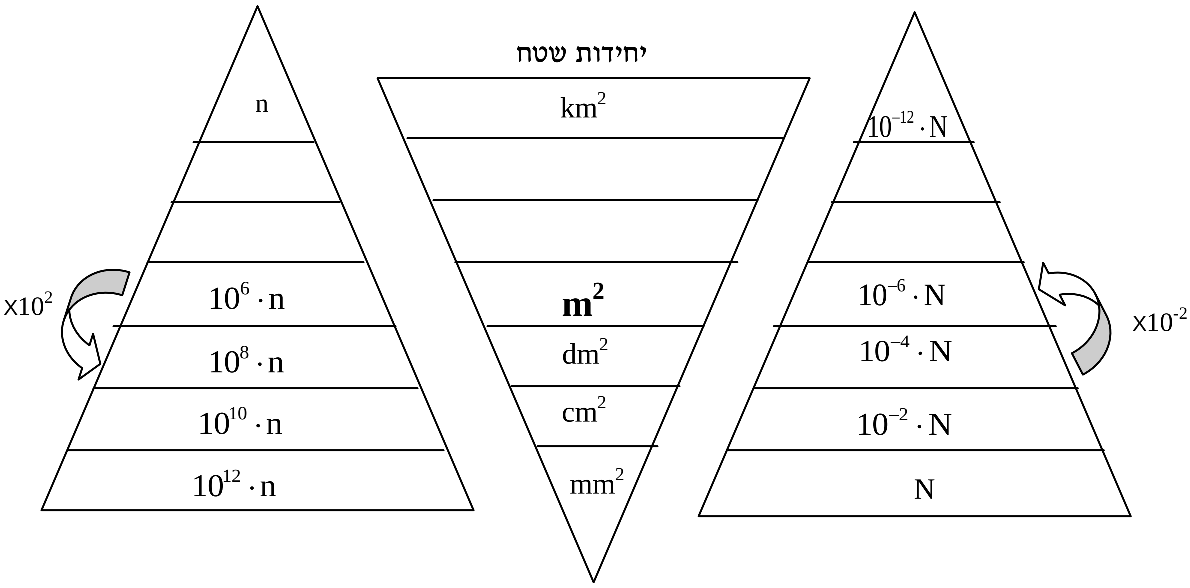
תרשים 4 - עיגול

- יחידת המדידה של שטח היא חזקה 2 של יחידת המדידה של אורך. לדוגמה: m^2 (מ"ר) – היחידה הבסיסית (SI), cm^2 (סמ"ר), km^2.

- אפשר לבטא שטח נתון באמצעות יחידות מדידה שונות. ככל שהיחידה הנבחרת גדולה יותר, כך המספר המתאר את הערך המספרי של השטח קטן יותר.

מספר X **יחידה** = **מספר** X יחידה

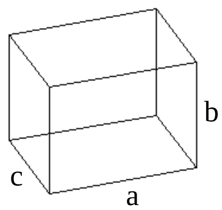
בתרשים הבא מצוירים סולמות שמייצגים את הפעולות שיש לבצע על מנת להמיר מספר גדול N של מילימטרים מרובעים או מספר קטן n של קילומטרים מרובעים ליחידות שטח אחרות. כפי שמצוין על ידי החיצים, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מטה (מיחידה גדולה לקטנה) דורש הכפלת המספר ב- $100=10^2$ ולעומת זאת, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מעלה (מיחידה קטנה לגדולה) דורש חילוק המספר ב- $100=10^2$.



להזכירך, היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת שטח היא <u>מטר מרובע (m^2 = מ"ר)</u>.

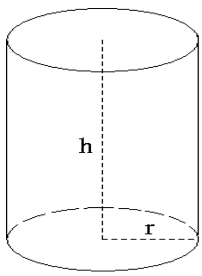
<u>נפחים של גופים</u>

- נפח הוא גודל פיזיקלי המבטא את המקום במרחב שהגוף תופס .
- נהוג לסמן נפח באות V, מהמילה האנגלית volume.
- בתרשים 5 מופיעה תיבה ו- c, b, a הם אורכי מקצועותיה.
  נפח התיבה הוא $V = a \cdot b \cdot c$.



תרשים 5 - תיבה

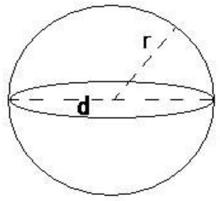
- בתרשים 6 מופיע גליל. r הוא רדיוס הבסיס ו- h הוא הגובה.
  נפח הגליל הוא: $V = \pi r^2 \cdot h$.
  הערה: πr^2 הוא שטח בסיס הגליל.



תרישם 6 - גליל

- בתרשים 7 מופיע כדור. r הוא רדיוס הכדור ו- d הוא הקוטר.

  נפח הכדור הוא: $V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$

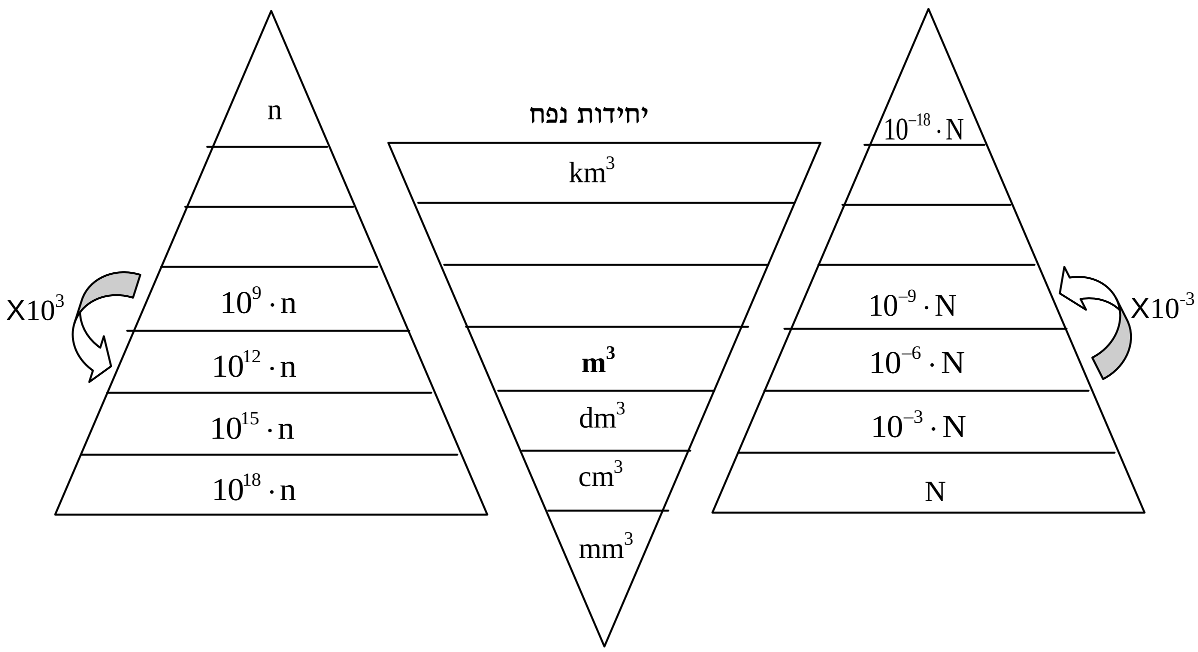


תרשים 7 - כדור

- יחידת המדידה של נפח היא חזקה 3 של יחידת המדידה של אורך, לדוגמה m^3 (מ"ק) שהוא היחידה הבסיסית (SI), cm^3 (סמ"ק), dm^3=liter.
- אפשר לבטא נפח נתון באמצעות יחידות מדידה שונות. ככל שהיחידה הנבחרת גדולה יותר, כך המספר המתאר את הערך המספרי של הנפח קטן יותר.

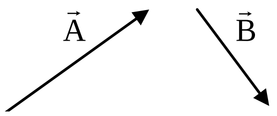
מספר X **יחידה** = **מספר** X יחידה

בתרשים הבא מצוירים סולמות שמייצגים את הפעולות שיש לבצע על מנת להמיר מספר גדול N של מילימטרים מעוקבים או מספר קטן n של קילומטרים מעוקבים ליחידות נפח אחרות. כפי שמצוין על ידי החיצים, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מטה (מיחידה גדולה לקטנה) דורש הכפלת המספר ב- $1000=10^3$; לעומת זאת, מעבר בין כל שני שלבים עוקבים כלפי מעלה (מיחידה קטנה לגדולה) דורש חילוק המספר ב- $1000=10^3$.



היחידה <u>הבסיסית</u> למדידת נפח היא <u>מטר מעוקב (m^3 = מ"ק)</u>.

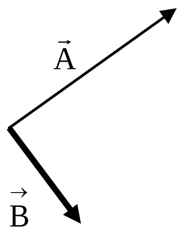
1.3 חיסור וקטורים



תרשים 8 - נתונים שני וקטורים

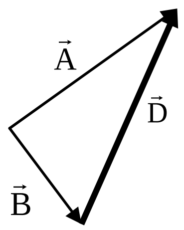
- <u>חיסור</u> וקטורי של שני וקטורים נתונים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא פעולה של מציאת <u>וקטור הפרש</u> $\vec{D}$. נדגים בהמשך כיצד מגיעים להפרש $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ ($\vec{A}$ מכונה מחוסר, $\vec{B}$ מכונה מחסר).
- אותם שני וקטורים יכולים ליצור וקטור הפרש נוסף, $\vec{D}'=\vec{B}-\vec{A}$ ובין שני וקטורי הפרש מתקיים $\vec{D}'=-\vec{D}$.

דרך I למציאת וקטור ההפרש - חיסור <u>בשיטת המשולש</u> (תרשימים 9 ו- 10):



תרשים 9 -
וקטורים מתחילים מאותה נקודה (1)

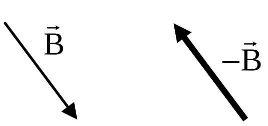
(1) משרטטים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששניהם יתחילו
מאותה נקודה.



תרשים 10 - וקטור ההפרש (2)

(2) מחברים את קצותיהם של שני הווקטורים; כיוונו של $\vec{D}$ הוא כלפי המחוסר $\vec{A}$.

הערה: אפשר לראות שווקטור ההפרש $\vec{D}$ משלים את המחסר $\vec{B}$ למחוסר $\vec{A}$, כלומר $\vec{B}+\vec{D}=\vec{A}$



תרשים 11 - וקטור נגדי (1)

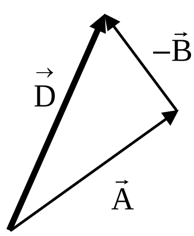
דרך II למציאת וקטור ההפרש - חיסור <u>בשיטת החיבור עם הנגדי</u> (תרשימים 11 ו- 12):

ניתן לכתוב: $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

תהליך מציאת $\vec{D}$:

(1) בונים את $-\vec{B}$, שהוא הווקטור הנגדי ל- $\vec{B}$:

(2) מחברים את $-\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ באחת משיטות החיבור שתוארו לעיל:



תרשים 12 -
וקטור ההפרש (2)

1.4 חזקות

- חזקה היא ביטוי שצורתו a^m.
- a מכונה <u>בסיס</u> החזקה ו- m מכונה <u>מעריך</u> החזקה.

- משמעות הביטוי a^m במקרה ש- m הינו מספר טבעי, היא מכפלה של a בעצמו m פעמים, כלומר: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ פעמים}}$. משמעות זו נחשבת כהגדרה ראשונית של חזקה.

- <u>פעולות עם חזקות</u>

כללי החישוב עם חזקות נובעות ישירות מההגדרה הראשונית.

- חזקות עם אותו בסיס

(1) מכפלה: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) חילוק: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) חזקה: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} = \left(a^n\right)^m$

(4) מכלל (2), במקרה הפרטי בו $m = n$ מקבלים: $\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0$

מכאן נובעת מסקנה חשובה <u>שחזקה מורכבת מבסיס כלשהו במעריך אפס שווה לאחד</u>.

(5) מכלל (2), במקרה הפרטי בו $m=0$ ובהתחשב גם בכלל (4) מקבלים: $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

- חזקות עם בסיסים שונים

(6) מכפלה: $a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$

(7) חילוק: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(8) מכלל (5) נובע: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$

1.5 כתיב מדעי

עיגול מספרים

- אם תוצאת חישוב היא שבר עשרוני בעל ספרות רבות אחרי הנקודה העשרונית, אזי מעגלים את התוצאה על ידי כתיבת רק חלק מהספרות המופיעות מיד אחרי הנקודה העשרונית.

- הספרה האחרונה שנרשמת במספר המעוגל נקבעת על פי הספרה שהייתה אחריה במספר המקורי. אם הספרה שהייתה אחריה היא קטנה מ- 5, אזי הספרה האחרונה שנרשמת היא כפי שהייתה במספר המקורי; אם הספרה שהייתה אחריה היא 5 ומעלה - אזי מגדילים ב- 1 את הספרה האחרונה שמשאירים. לדוגמה המספר 3.232 יקורב כ- 3.23, אבל המספר 3.237 יקורב כ- 3.24.

שימוש בחזקות עם בסיס 10

- במדעים מדויקים מקובל לכתוב מספרים גדולים וקטנים כמכפלה בין שבר עשרוני שערכו המוחלט בין 1 (כולל) ל- 10 לבין חזקה עם בסיס 10.
- נהוג לעגל את השבר העשרוני עד לספרה השנייה אחרי הנקודה העשרונית (עד למאיות).
- במספרים קטנים מ- 1 מעריך החזקה שלילי.
- במספרים גדולים מ- 10 מעריך החזקה חיובי.

1.6 ממוצע

- אם נתונים n מספרים a_1, a_2 , ... , a_n, הממוצע שלהם מוגדר כתוצאת החילוק של סכום המספרים במספרים: $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.
- אם המספר n גדול מאד, לצורך טיפול באוכלוסיית מספרים כזאת, משתמשים בערך הממוצע שלהם (התייחסות סטטיסטית).

2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

- לחישוב הלחץ המופעל על ידי גוף על המשטח עליו הוא נשען יש צורך לחשב את ערך שטח המגע בין הגוף למשטח.
- למוצקים ולנוזלים יש נפח קבוע, כי הם אינם דחיסים (בקירוב טוב מאד). לכן מספיק לחשב פעם אחת את נפחם.
- נפחו של גז שווה לנפח הכלי בו הוא כלוא ולכן אם נפח הכלי משתנה, משתנה גם נפח הגז.
- תנועותיהן של המולקולות בגז הן תנועות תלת-ממדיות. כתוצאה מכך מהירותה של כל מולקולה היא וקטור אותו ניתן לפרק לשלושה רכיבים קרטזיים.
- מאחר שבכלים בהם שרוי גז נמצא מספר רב מאד של מולקולות, משתמשים באנרגיה הקינטית הממוצעת של מולקולה בודדת. לשם כך יש צורך לחשב את הממוצע של ריבועי מהירויות המולקולות.

3. תרגילים

3.1 תרגילי מתמטיקה

1. ידוע ש- $\frac{a\cdot b}{c}$ קבוע.

א. אם גם b קבוע ו- c גדל פי שלושה, כיצד משתנה a ?

ב. אם גם a קבוע ו- b קטן פי ארבעה, כיצד משתנה c?

ג. אם גם c קבוע ו- a קטן פי חצי, כיצד משתנה b?

3.2 תרגילי מעבר ופיזיקה

2. השלם את הטבלה הבאה. רשום את כל המספרים בכתיב מדעי בלבד.

	סמ"ר		דצ"ר		
		mm^2		km^2	m^2
1			19.7		
2				2.25	
3					7.523
4	5				
5		197582			
6				12056	
7	0.999				
8					28.64

3. נתון שרדיוסו של אטום מסוים X הוא $10^{-10}m$.

א. חשב את נפח האטום X.

ב. מדוד בדיוק המרבי האפשרי את מידותיו של מטבע של 10 ₪ וחשב את נפחו.

ג. הערך כמה אטומי X נכנסים בנפח השווה לנפחו של מטבע של 10 ₪.

4. חשב את הלחץ המופעל על משטח על ידי תיבת ברזל (צפיפותו $7.6\frac{g}{cm^3}$) אם רוחבה 12cm גובהה 30mm ועומקה 0.0043m. הצג את תשובתך ביחידות Pa.
שים לב – ישנן שלוש אפשרויות.

5. נתון חומר מסוים שבטמפרטורת החדר נמצא במצב נוזלי.

א. "טמפרטורת החדר" נחשבת 20 מעלות צלסיוס. בטא טמפרטורה זאת ביחידות קלווין.

ב. במצב גז הטמפרטורה של אותו חומר שווה ל- 38.75 מעלות קלווין. בטא טמפרטורה זאת במעלות צלסיוס.

6. * במיכל גלילי נמצא גז חד-אטומי בטמפרטורת החדר, 20^oC, ובלחץ השווה ללחץ האטמוספרי, 10^5Pa. מסתה של כל מולקולה של גז זה גדולה פי 32 ממסת הפרוטון. מידות החיצוניות של המיכל הן 40cm גובה ו- 0.1m וקוטר הבסיס . המיכל עשוי מפח בעובי 2mm.

א. מהו נפח הגז?

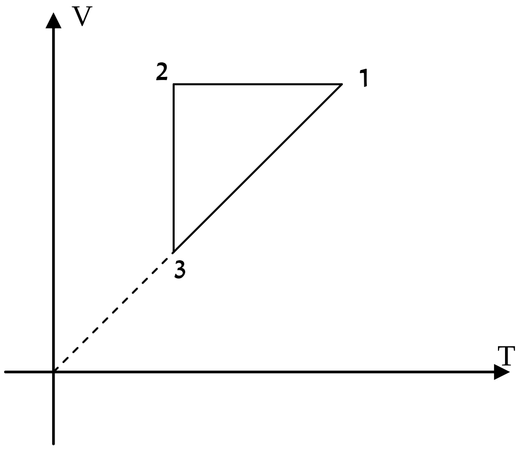
ב. כמה מולקולות של גז יש במיכל?

ג. העזר בנוסחאון וחשב את מסת הגז שבמיכל.

ד. חשב את צפיפות הגז שבמיכל.

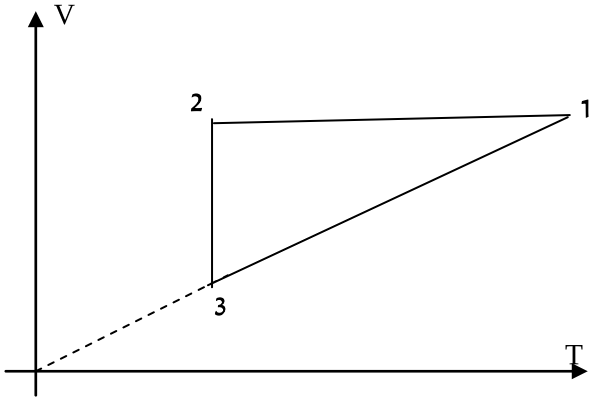
ה. פי כמה ישתנה לחץ הגז במיכל אם הטמפרטורה שלו במעלות קלווין תגדל פי 3?

7. * גז שמסתו נשארת קבועה עובר שלושה שינויים $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ שמתוארים במערכת צירים נפח – טמפרטורה:



א. מדוע המשך הקטע $3 \leftarrow 1$ חייב לעבור דרך ראשית הצירים?

ב. בדיוק אותם שלושה שינויים ניתנים לתיאור על ידי הגרף הבא:



הסבר כיצד יתכן ששני הגרפים מתארים את אותם המעברים.

ג. שרטט שני גרפים נוספים: לחץ - טמפרטורה ולחץ - נפח, המתארים את אותם השינויים.

תשובות לתרגילים

3. א. $4.19\cdot10^{-30}\,\text{m}^3$

4. (1) 2279Pa ; (2) 326.7Pa ; (3) $9116\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

6. א. $2.866\cdot10^{-3}\,\text{m}^3$

ב. $7.08\cdot10^{22}$

ג. $3.79\cdot10^{-3}\,\text{kg}$

ד. $1.32\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

פרק ט – תנועה הרמונית פשוטה

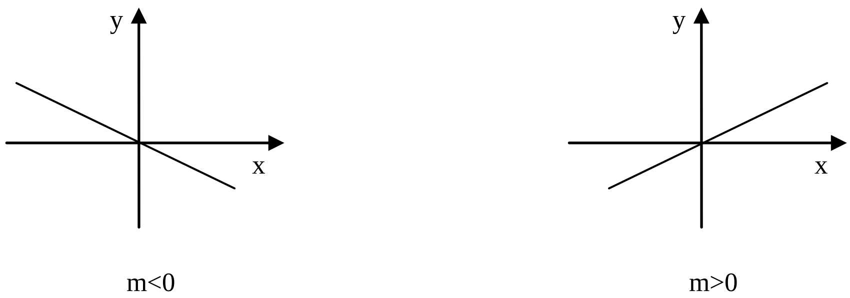
מושגים מתמטיים – יחס ישר, יחידות מדידה של זווית, פונקציות טריגונומטריות סינוס וקוסינוס, קירוב של זוויות קטנות, זהויות טריגונומטריות, ישור גרף, משוואות טריגונומטריות.

קשר לעולם הפיזיקה – הקשר בין תנועה מעגלית קצובה לתנועה הרמונית פשוטה, תיאור תלות המקום, המהירות והתאוצה בזמן באמצעות פונקציות טריגונומטריות קוסינוס וסינוס, זמן מחזור.

1. נושאים מתמטיים

1.1 יחס ישר

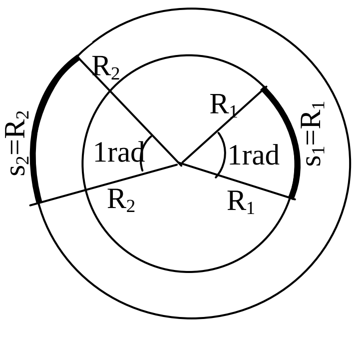
- פונקציה ממעלה ראשונה שצורתה האנליטית $y = mx + n$ מכונה "פונקציה קווית" או "פונקציה לינארית".
- התיאור הגרפי של פונקציה לינארית במערכת צירים קרטזית הוא קו ישר ששיפועו m ושיעור נקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא n.
- כאשר האיבר החופשי n מתאפס, הגרף עובר דרך ראשית הצירים – תרשים 1. במקרה כזה אומרים ש- y נמצא ביחס ישר ל- x; למשל, אם x גדל פי N, זה יגרום ל-y לגדול פי N גם כן.



תרשים 1 - תיאורים גרפיים של יחס ישר

1.2 יחידות מדידה של זוויות

- היחידה הרגילה למדידה זוויות היא מעלה. זווית של מעלה אחת היא הזווית המרכזית במעגל שנשענת על קשת שאורכה $\frac{1}{360}$ מהיקף המעגל.



תרשים 2 - זוויות של רדיאן אחד

- הזווית המרכזית שמתאימה לחצי מעגל שווה ל- 180°
  והזווית המרכזית שמתאימה למעגל שלם שווה ל- 360°.
- יחידה אחרת למידת זוויות היא רדיאן (radian). זווית של רדיאן אחד היא הזווית המרכזית במעגל שנשענת על קשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל - ראה תרשים 2.
- הרדיאן הוא יחידת המדידה הבסיסית של זוויות בפיזיקה.
- מעבר ממעלות לרדיאנים ולהיפך

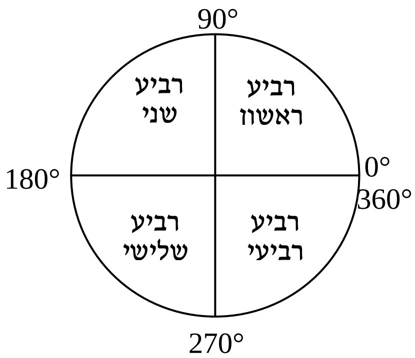
$\alpha(^\circ)$	0	30	45	60	90	180	270	360
$\alpha(\text{rad})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	-1	0
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=0.5$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	-1	0	1

- זווית מרכזית של 360° או 2π rad נשענת על קשת שאורכה היקף המעגל, כלומר $2\pi R$.

1.3 המעגל הטריגונומטרי

בתרשים 3 מתואר מעגל המכונה מעגל טריגונומטרי. במעגל זה קיימים המאפיינים הבאים:

- הרדיוס שלו שווה ליחידת אורך אחת.
- "הכיוון הטריגונומטרי החיובי" במעגל זה מוגדר כמנוגד לכיוון הסיבוב של מחוגי השעון.
- מעגל זה מחולק לארבעה רבעים, הממוספרים לפי הכיוון הטריגונומטרי החיובי.



תרשים 3 - מעגל יחידה

- זווית מרכזית נבנית כך שהקרן הראשונה היא תמיד בכיוון המסומן ב- 0° והקרן השנייה נמצאת ברביע המתאים לגודל הזווית.
- ערך הזווית הוא חיובי או שלילי, בהתאם לכיוון הסיבוב של הקרן השנייה ביחס לראשונה.

1.4 פונקציות טריגונומטריות סינוס וקוסינוס (פונקציות הרמוניות)

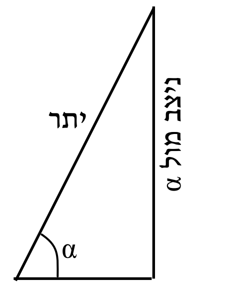
- הארגומנט של הפונקציות הטריגונומטריות הוא זווית ולכן בחוברת זאת נסמנו ב- α.
- בסעיף 1.3 של פרק ב' הוגדרו הפונקציות הטריגונומטריות סינוס וקוסינוס של זוויות חדות, כלומר $\alpha \le 90^\circ$, כיחסים בין צלעות רלוונטיות של משולש ישר זווית.

הפונקציה <u>סינוס</u>:

$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב מול } \alpha}{\text{היתר}}$$

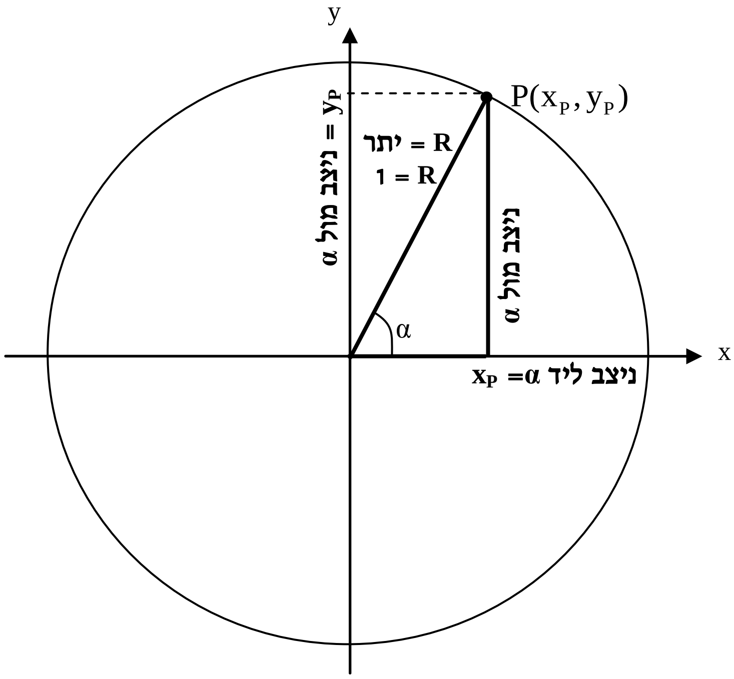
הפונקציה <u>קוסינוס</u>:

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב ליד } \alpha}{\text{היתר}}$$



תרשים 4 - משולש ישר זווית

- לגבי זווית α כלשהי ניתן להגדיר את הפונקציות $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$ בעזרת "מעגל טריגונומטרי" או "מעגל יחידה".
- במקרה ש- $\alpha \le 90^\circ$, אפשר להעביר את המשולש למעגל טריגונומטרי כך, שהיתר יהווה רדיוס (תרשים 5)



תרשים 5 - זווית חדה α במעגל טריגונומטרי

- בהתאם להגדרות הפונקציות הטריגונומטריות $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$

במשולש ישר זווית ולהגדרת המעגל הטריגונומטרי (רדיוס R=1), מתקבלים הביטויים הבאים (ראה גם תרשים 5):

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{R} = y_P \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{x_P}{R} = x_P$$

- במעגל טריגונומטרי ביטויים אלה נכונים עבור זווית α כלשהי בתחום $-\infty < \alpha < \infty$.

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R} = y \;\; ; \;\; \cos\alpha = \frac{x}{R} = x}$$

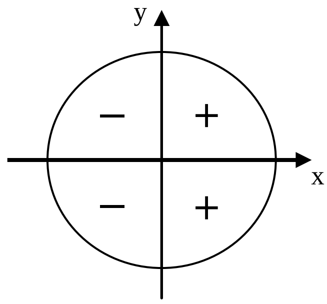
- במעגל טריגונומטרי הזווית α נמדדת ביחס לכיוון החיובי של ציר x.
- תכונה חשובה של הפונקציות הטריגונומטריות היא מחזוריותן. משמעות הדבר - שערכיהן חוזרים על עצמם בצעדים קבועים של הארגומנט.
- המחזור של הפונקציות $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$ הוא 2π, כלומר:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha+2\cdot 2\pi) = ... = \sin(\alpha+k\cdot 2\pi)$$

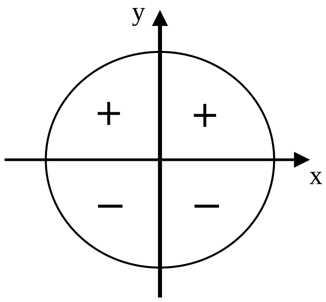
$$\cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha+2\cdot 2\pi) = ... = \cos(\alpha+k\cdot 2\pi)$$

כאשר k הינו מספר שלם או אפס.

- הטווחים של שתי הפונקציות הנ"ל הם זהים - $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$.
- ערכי שתי הפונקציות יכולים להיות חיוביים או שליליים, בהתאם לרביע בו נמצאת הזווית (תרשימים 6 ו- 7).

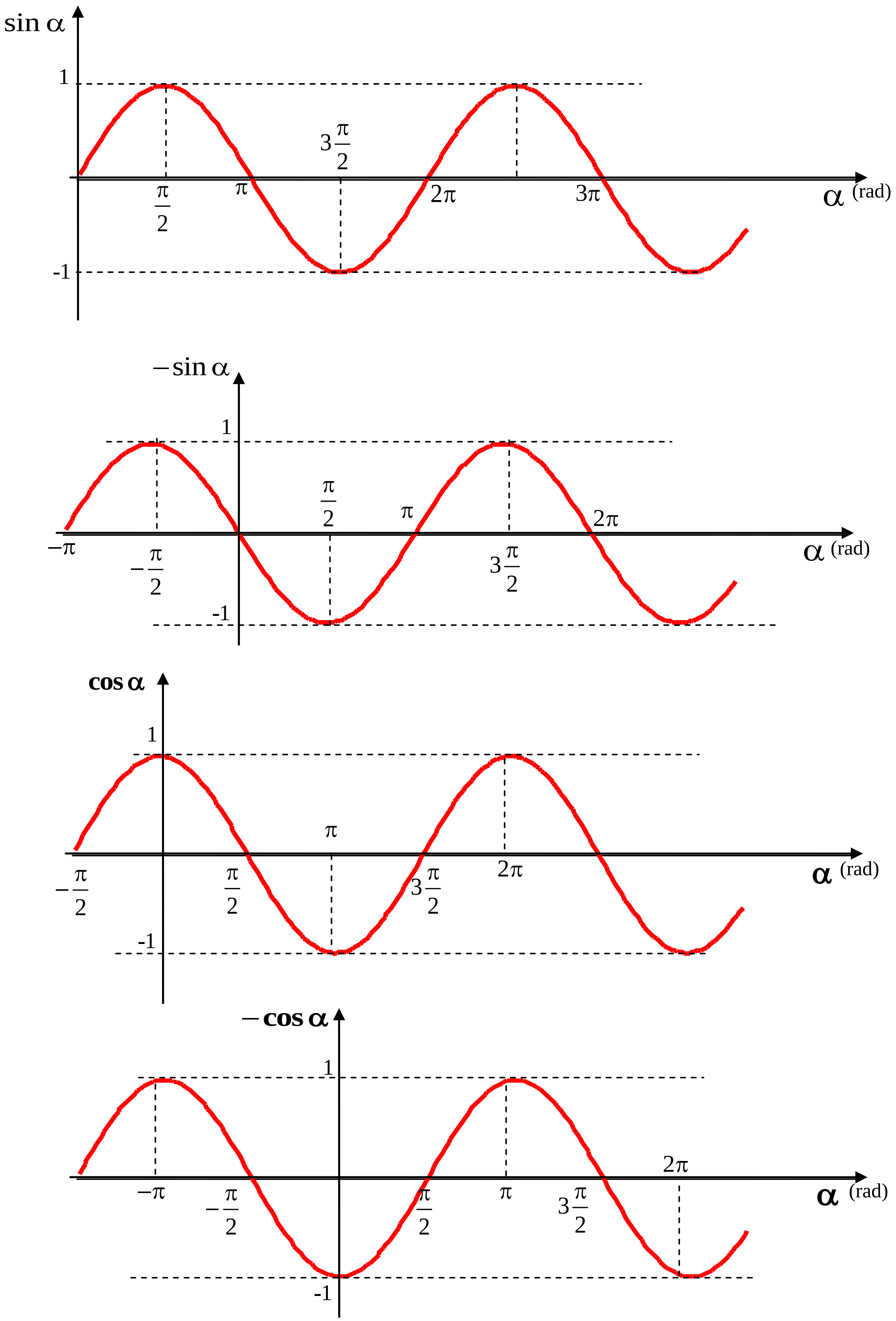


תרשים 6 - סימני קוסינוס
הנמדד על ציר x



תרשים 7 - סימני סינוס
הנמדד על ציר y

- בתרשימים הבאים מופיעים הגרפים המייצגים כמה פונקציות טריגונומטריות כתלות בזווית.



תרשים 8 - הצגה גרפית של פונקציות טריגונומטריות

- כפי שרואים בתרשים 8, לכל הגרפים אותה צורה. צורה זאת מכונה סינוסואידה.
- ההבדל היחידי בין ארבעת הגרפים הוא מיקום הציר האנכי.
- פונקציה המיוצגת על ידי גרף סינוסואידלי מכונה "פונקציה הרמונית".
- כפי שטווח הפונקציות $y = \sin\alpha$ ו- $y = \cos\alpha$ הוא $[-1,1]$, טווח הפונקציות $y = k\cdot\sin\alpha$ ו- $y = k\cdot\cos\alpha$ הוא $[-k,k]$. במילים אחרות צורות הגרפים אינן משתנות, נקודות החיתוך עם הציר האופקי אינן משתנות ורק נקודות הקיצון מתרחקות מציר האופקי פי k.

1.5 זהויות טריגונומטריות

- זהות טריגונומטרית היא שוויון בין ביטויים טריגונומטריים המתקיים עבור כל ערכי הזווית שעבורם הביטויים מוגדרים.
- בהמשך רשומות הזהויות השימושיות בפרק זה:

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin\alpha \quad ; \quad \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha \quad ; \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha \quad ; \quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$$

1.6 הקירוב עבור זוויות קטנות

- ישנם מקרים בהם הסינוס של זווית והטנגנס שלה הם שווים בקירוב טוב:

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha$$

- זוויות שעבורן מתקיים הקירוב הנ"ל נקראות "זוויות קטנות".
- אם הזווית נמדדת ברדיאנים, ערכה ברדיאנים שווה גם הוא לסינוס ולטנגנס שלה:

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\alpha_{(\mathrm{rad})}$$

- לא ניתן לפסוק מהי הזווית הגבולית בין זוויות "קטנות" ו"לא קטנות". ההחלטה מתקבלת בהתאם למידת הדיוק הרצויה בקירוב.

1.7 משוואות טריגונומטריות

- משוואה טריגונומטרית היא משוואה שבה הנעלם הוא חלק מהארגומנט של פונקציה טריגונומטרית.
- מאחר שכל פונקציה טריגונומטרית מחזורית, לכל משוואה טריגונומטרית יש אינסוף פתרונות.
- את כל הפתרונות אפשר לכתוב כביטוי אחד, הנקרא "פתרון כללי" של המשוואה הטריגונומטרית.
- מאחר שארגומנט של פונקציה טריגונומטרית הוא זווית, גם פתרון של משוואה טריגונומטרית הוא זווית.

- במקרה שמשתמשים במחשבון להתרת משוואה טריגונומטרית, אפשר לכוון אותו לעבודה במעלות (DEG) או ברדיאנים (RAD) וכתוצאה מכך יתקבל הפתרון בהתאם.

1.8 נגזרות של פונקציות סינוס וקוסינוס

בטבלה הבאה רשומות הפונקציות שמתקבלות על ידי גזירה אחת (הנגזרת הראשונה) ועל ידי שתי גזירות (הנגזרת השנייה) של מספר פונקציות טריגונומטריות.

הפונקציה $y = f(x)$	הנגזרת הראשונה $y' = f'(x)$	הנגזרת השנייה $y'' = f''(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$k\cdot\sin x$	$k\cdot\cos x$	$-k\cdot\sin x$
$k\cdot\cos x$	$-k\cdot\sin x$	$-k\cdot\cos x$
$\sin(px)$	$p\cdot\cos(px)$	$-p^2\cdot\sin(px)$
$\cos(px)$	$-p\cdot\sin(px)$	$-p^2\cdot\cos(px)$
$k\cdot\sin(px)$	$kp\cdot\cos(px)$	$-kp^2\cdot\sin(px)$
$k\cdot\cos(px)$	$-kp\cdot\sin(px)$	$-kp^2\cdot\cos(px)$

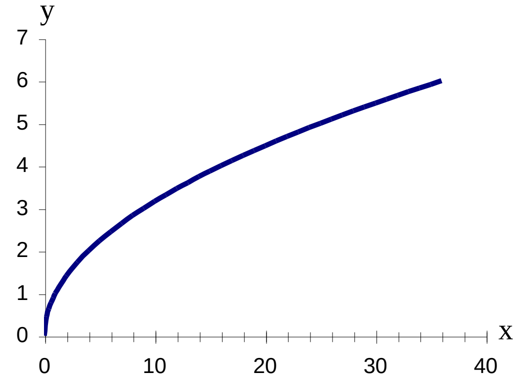
1.9 יישור (לינאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית – הנושא הוצג בהרחבה בפרק א

- יישור הוא פעולה שמאפשרת לקבל פונקציה קווית (לינארית) מפונקציה לא לינארית, על ידי החלפת אחד משני המשתנים במשתנה חדש. המשתנה החדש מתקבל מהמשתנה הקודם על ידי הפעלה של אחת הפעולות המתמטיות, כמו חזקה או שורש.
- לדוגמה, אם נתונה הפונקציה $y = \sqrt{(x)}$, אשר הגרף שלה איננו ישר (תרשים 9), ישנן שתי אפשרויות יישור (כלומר להגיע לגרף קו ישר):

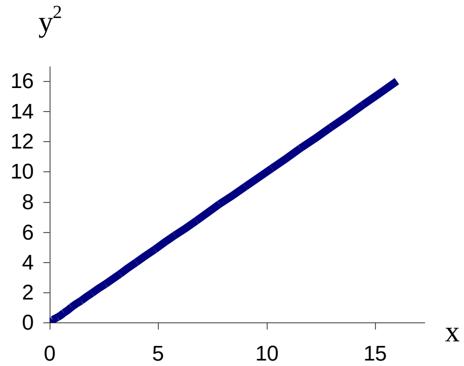
- אפשרות אחת היא בהתאם לתבנית חדשה $y = (\sqrt{x})$ (תרשים 10).

- אפשרות שנייה היא בהתאם לתבנית חדשה $(y^2) = x$ (תרשים 11).

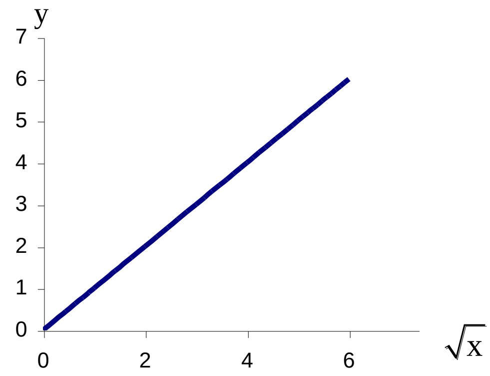
בין הסוגריים רשום המשתנה החדש שמשמש לבניית כל גרף.



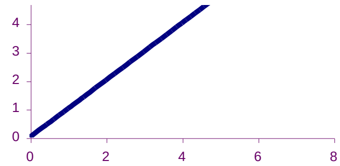
תרשים 9 - גרף הפונקציה $y=f(x)$
כאשר $f(x)=\sqrt{x}$



תרשים 11 - גרף הפונקציה $y^*=f(x)$
כאשר $y^*=(y^2)$

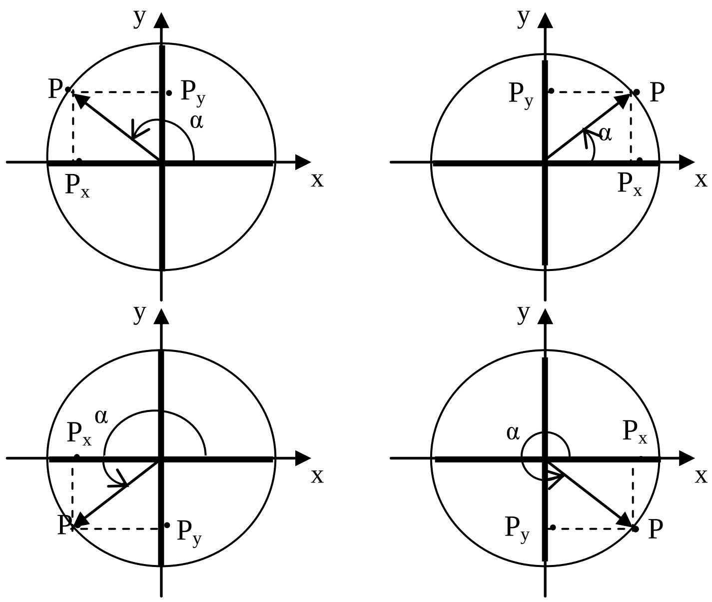


תרשים 10 - גרף הפונקציה $y=f(x^*)$
כאשר $x^*=\sqrt{x}$



.2 טיים לעולם הפיזיקה

- אם נקודה P חגה על היקף מעגל כל הזמן באותה מגמה, היטליה P_x ו- P_y על הצירים נעים הלוך ושוב על הקוטר האופקי ועל הקוטר האנכי בהתאמה.
- בתרשים 12 הנקודה P נמצאת ברבעים שונים, דבר שמשפיע על סימני ההיטלים.



תרשים 12 - מקומות שונים של הנקודה P ושל היטליה

- המרחק המרבי ממרכז המעגל אליו יכול להגיע במהלך תנועתו כל אחד משני ההיטלים שווה לרדיוס המעגל (R). בפיזיקה המרחק הזה נקרא אמפליטודה (משרעת) וסימונה A (כלומר A=R).
- אם קצב סיבוב הנקודה P הוא קבוע, אזי הזווית α משתנה ביחס ישר לזמן, כך ש- $\alpha = \omega \cdot t$. האות היוונית ω (אומגה) מסמנת את קצב שינוי הזווית α ולכן נקראת "המהירות הזוויתית" של הנקודה המסתובבת על המעגל.
- עבור ההיטלים, הנעים כל אחד על קו ישר, ω מכונה "תדירות זוויתית".
- כאשר הנקודה P נמצאת ברגע t=0 בנקודה (A,0), ניתן לסכם ולכתוב את הפונקציות מקום-זמן של ההיטלים P_x ו- P_y :

  - לגבי הנקודה P_x , הנמצאת ברגע t=0 בנקודה (A,0) (קצה חיובי של מסלולה):

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

  - לגבי הנקודה P_y , הנמצאת ברגע t=0 בנקודה (0,0) (מרכז מסלולה):

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

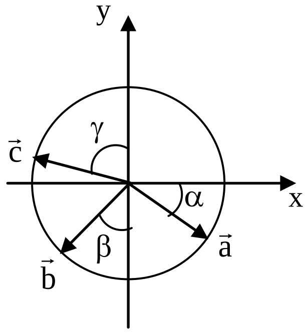
- תנועה שמתוארת על ידי פונקציות טריגונומטריות הרמוניות (סינוס או קוסינוס), כפי שרשום בפסקה הקודמת, מכונה "תנועה הרמונית פשוטה".
- כפי שצוין בסעיף 1.4 בפרק זה, הפונקציות ההרמוניות הן מחזוריות, עם מחזור 2π רדיאנים. גם תנועה הרמונית פשוטה מחזורית - חוזרת על עצמה אחרי פרק זמן T המכונה "זמן מחזור".
- אם המחזור הוא $\alpha = \omega T = 2\pi$, אזי זמן המחזור הוא $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- בטבלה הבאה רשומות הפונקציות הקינמטיות עבור שני המקרים של תנועה הרמונית פשוטה לאורך ציר x.

	ברגע t=0 הגוף נמצא בקצה החיובי של מסלולו	ברגע t=0 הגוף נמצא במרכז מסלולו
מקום	$x(t) = A\cos(\omega t)$	$x(t) = A\sin(\omega t)$
מהירות	$v(t) = x'(t) = -A\omega\sin(\omega t)$	$v(t) = x'(t) = A\omega\cos(\omega t)$
תאוצה	$a(t) = v'(t) = x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$	$a(t) = v'(t) = x''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$

- הגרפים המיצגים את הפונקציות הרשומות בטבלה מופיעים בכל ספרי לימוד הפיזיקה בפרק העוסק בתנועה הרמונית. גרפים פיזיקליים אלה דומים לגרפים המופיעים בתרשים 8 של פרק זה, אבל שונים בערכים הרשומים על הצירים וביחידות המדידה שלהם.
- מאחר שיחידת המדידה של זוויות בפיזיקה היא רדיאן, במהלך התרת משוואה טריגונומטרית בעזרת מחשבון יש לוודא שהוא מוגדר לעבודה ברדיאנים.

3. תרגילים

1. רדיוס המעגל המתואר בתרשים הוא R. עבור כל אחד משלושת הווקטורים המופיעים בתרשים, רשום ביטויי היטליו על הצירים (שים לב לסימנים!).



2. ענה על הסעיפים הבאים:

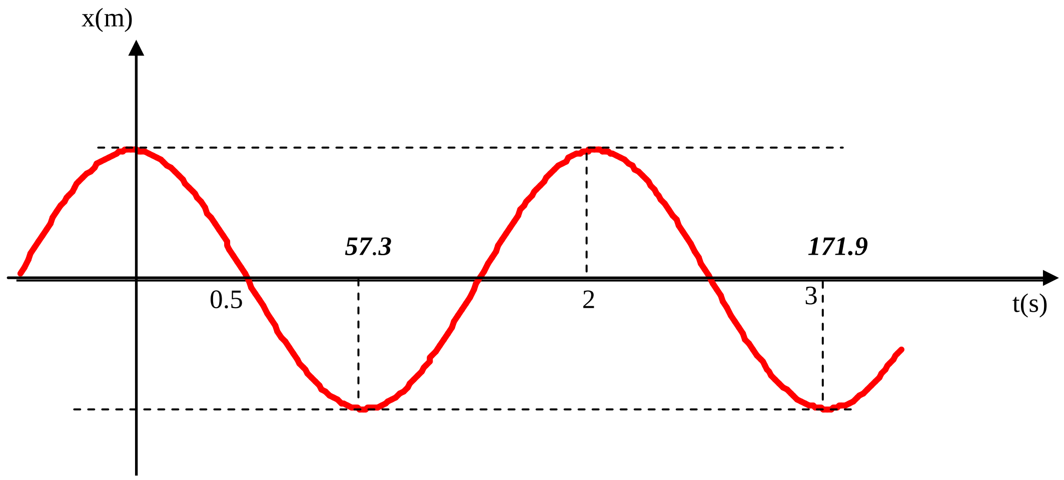
א. שרטט גרף של x כפונקציה של α אם $x = 5\cos\alpha$ ($0^\circ \le \alpha \le 540^\circ$). רשום על הצירים את השיעורים של נקודות החיתוך ושל נקודות הקיצון.

ב. שרטט גרף של x כפונקציה של α אם $x = 5\sin\alpha$ ($0^\circ \le \alpha \le 540^\circ$). רשום על הצירים את השיעורים של נקודות החיתוך ושל נקודות הקיצון.

ג. מהו ההבדל המהותי בין שני הגרפים ששרטטת בסעיפים הקודמים?

ד. בפונקציה הנתונה בסעיף א' רוצים להחליף את α ב ($\pi \cdot t$), כאשר x מסמן מרחק הנמדד במטרים ו- t מסמן זמן הנמדד בשניות. מהן יחידות המדידה של π ? (שים לב! קיימת יותר מאפשרות אחת, בהתאם ליחידת המדידה של הזווית α)

ה. הגרף הבא מתאים לפונקציה שהתקבלה בסעיף ד'. הערכים הרשומים על הציר האופקי בכתב נטוי - מקורבים.



(1) הסבר מדוע באחת הנקודות על הציר האופקי רשומים שני ערכים שונים.

(2) השלם לגבי כל נקודות החיתוך עם הצירים ונקודות הקיצון את הערכים המתאימים. בציר הזמן אמורים להופיע שני ערכים שונים בכל נקודה רלוונטית.

3. השלם את הטבלה הבאה ונסח מסקנות:

$\tan(\alpha(rad))$	$\sin(\alpha(rad))$	$\alpha(rad)$	$\tan(\alpha(^\circ))$	$\sin(\alpha(^\circ))$	$\alpha(^\circ)$
					40
					30
					20
					10
					9
					8
					7
					6
					5
					4.5
					4
					3.5
					3
					2.5
					2
					1.5
					1
					0.9
					0.8
					0.7
					0.6
					0.5
					0.1
					0.05
					0

4. א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $y = 3\sin(5t)$.
ב. גזור את הפונקציה מסעיף א׳ לפי t, ושרטט סקיצה של גרף הנגזרת.
ג. גזור פעם נוספת את הפונקציה שהתקבלה בסעיף ב׳, ושרטט סקיצה של גרף הנגזרת השנייה.
ד. במה נבדלים זה מזה הגרפים בשלושת הסעיפים הקודמים?

5. * נתון כי $b = c \cdot \cos(nd)$, כאשר b הוא המשתנה התלוי, d המשתנה הבלתי תלוי ו- c, n קבועים.
א. גזור את b לפי d.
ב. בטא את $\sin(nd)$ באמצעות $\cos(nd)$, בהתחשב באחת הזהויות הטריגונומטריות הרשומות בסעיף 1.5.
ג. הצב את הביטוי שהתקבל בסעיף ב׳ בביטוי שהתקבל בסעיף א.
ד. חלץ את $\cos(nd)$ מהביטוי המקורי, העלה אותו בחזקה שנייה והצב את מה שקיבלת בתוצאה של סעיף ג׳ ופשט.
ה. מצא בדף הנוסחאות במכניקה תבנית דומה לתבנית שהתקבלה בסעיף ד, ונסה להגיע אליה בעצמך על סמך נוסחאות אחרות המופיעות בדף הנוסחאות.

6. בשאלה זאת כל הזוויות מבוטאות ברדיאנים. נתון כי $m = 0.4\cos(30n)$.
א. מהו הערך המקסימלי של m?
ב. חשב את ערכו של m אם נתון $n = 0.25$.
ג. חשב את ערכו של n אם נתון $m = 0.25$.
ד. חשב את הנגזרת של m לפי n בנקודה $n = 0.25$.
ה. מהו הערך המקסימלי של הנגזרת של m לפי n?

7. * נתון כי $k = 2.5\sin\left(13d - \frac{\pi}{2}\right)$.
א. מהו הערך המקסימלי של k?
ב. חשב את ערכו של k כאשר $d = \frac{\pi}{13}$.
ג. חשב את ערכו של d כאשר $k = \frac{1}{2}$.
ד. חשב את הנגזרת של k לפי d בנקודה $d = \frac{\pi}{13}$.
ה. העזר בזהויות הטריגונומטריות ובטא את הפונקציה הנתונה באמצעות קוסינוס.

8. * נתונה הפונקציה $y=5\cos(3z)$.

א. מצא את y כאשר $z = 0.3\text{rad}$.

ב. מצא את z (ברדיאנים) כאשר $y = 0.3$.

ג. מחליפים את y ב- x ואת z ב- t. האם כתוצאה מהחלפת האותיות ישתנו תשובותיך לסעיפים א ו- ב?

ענה על הסעיפים הבאים בהנחה שהמשוואה בצורתה שהתקבלה בסיף ג מתארת תנועה הרמונית פשוטה.

ד. מהי המשמעות הפיזיקלית של האותיות x ו- t ?

ה. מהי המשמעות הפיזיקלית של המספרים 5 ו- 3 ומה יחידותיהם אם כל הגדלים הפיזיקליים נמדדים ביחידות SI?

ו. גזור לפי t את הביטוי שהתקבל בסעיף ג. מהו הגודל הפיזיקלי המיוצג על ידי הביטוי שקיבלת בגזירה ומהי המשמעות הפיזיקלית של כל אחד מהמספרים המופיעים בביטוי זה?

ז. גזור מחדש לפי t את הביטוי שהתקבל בסעיף ו. מהו הגודל הפיזיקלי המיוצג על ידי הביטוי שקיבלת בגזירה ומהי המשמעות הפיזיקלית של כל אחד מהמספרים המופיעים בביטוי זה?

9. * נתונה הפונקציה $x = 3\cos(7t)$.

א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה הנתונה.

ב. גזור את x לפי t, ושרטט סקיצה של גרף הנגזרת.

ג. גזור את x' (הפונקציה שקיבלת בסעיף ב') לפי t, ושרטט סקיצה מתאימה.

ד. גוף נקודתי מונח על משטח חלק, קשור לקפיץ אופקי ומבצע תנודות הרמוניות פשוטות מסביב לנקודה שתסומן $x = 0$. נתון כי מסתו של הגוף היא 4 ק"ג.

(1) מה צריך להיות קבוע הקפיץ על מנת שתנועת הגוף תיוצג ע"י הפונקציה הנתונה?

(2) מה מייצגים הביטויים שקיבלת בסעיפים ב' ו- ג' עבור הגוף המתנדנד?

(3) חשב את זמן המחזור T של התנודות ורשום על צירי הזמן בגרפים ששרטטת בסעיפים א', ב' ו- ג' את הערכים המספריים של T , $\frac{3}{4}T$, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{4}T$.

(4) סמן על כל אחד מהגרפים את הנקודות המתאימות לרגעים בהם הגוף עובר בנקודת שיווי- המשקל.

(5) מהו מיקום הגוף ברגע $t = 0$?

(6) אילו ברגע $t = 0$ הגוף היה בנקודת שיווי המשקל, מה הייתה הפונקציה מקום- זמן המתאימה?

10. ** נתונה המשוואה $y = -0.8\cos(2x)$.

א. שרטט סקיצה של הפונקציה בקטע $-\pi < x < \pi$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין ציר ה- x, גרף הפונקציה והישרים $x=\frac{1}{4}\pi$, $x=\frac{3}{4}\pi$.

ג. מצא את הפונקציה הקדומה של הביטוי הנתון (הפונקציה, שאם נגזור אותה נקבל את הביטוי הנתון), שהגרף שלה עובר בראשית הצירים.

ד. שרטט סקיצה של הפונקציה שקיבלת בסעיף ג' בקטע $-\pi<x<\pi$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין ציר ה-x, גרף הפונקציה והישרים $x=\frac{1}{2}\pi$ ו- $x=\pi$.

ו. מצא את הפונקציה הקדומה של הביטוי שקיבלת בסעיף ג', שהגרף שלה עובר בראשית הצירים.

גוף מבצע תנועה הרמונית פשוטה, שתאוצתה לאורך הזמן מבוטאת ע"י: $a=-0.8\cos(2t)$

(כל הגדלים נמדדים בחידות SI).

ז. מצא את התדירות הזוויתית, ω , ואת המשרעת, A.

ח. נתון כי קבוע המתנד הוא c = 2. מצא את מסת הגוף.

ט. חשב את זמן המחזור של התנועה.

י. הסבר מהי המשמעות הפיזיקלית של הגדלים שמצאת בסעיפים ב' ו- ה'.

יא. הסבר מהי המשמעות הפיזיקלית של הפונקציות שמצאת בסעיפים ג' ו- ו'.

11. פתור את המשוואות הבאות בתחום $0\le\alpha\le180^\circ$:

א. $\tan(5\alpha+38^\circ)=\tan103^\circ$.

ב. $\cos(\alpha+5^\circ)=0$.

ג. $\sin^2\alpha=0.5$.

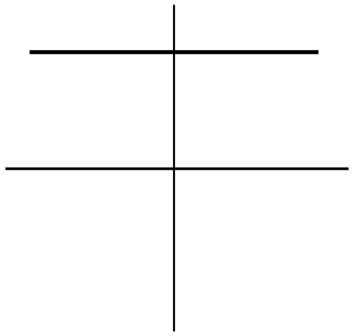
ד. $\cos(6\alpha)+1=\cos(3\alpha)$.

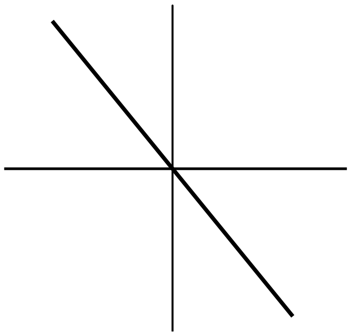
ה. $\cos^2\alpha-1=\sin\alpha$.

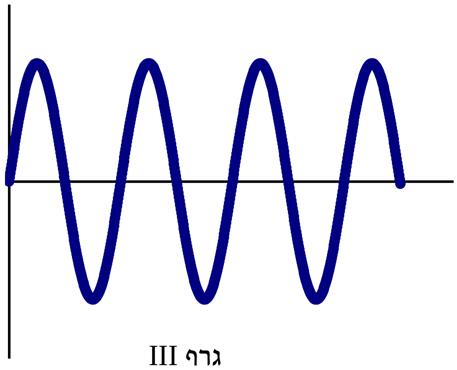
ו. $2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=0$.

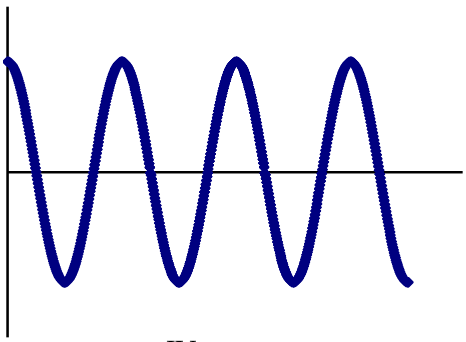
12. * גוף מבצע תנודות הרמוניות מסביב לנקודה שנבחרה כראשית ציר x. בטבלה הבאה - רשימת פונקציות שונות הקשורות לתנועת הגוף ובהמשך ארבעה גרפים. בטבלה x_0 מסמן את המקום ההתחלתי של הגוף (מקומו ברגע t=0) ו- A מסמן את האמפליטודה של התנודות.
התאם לכל פונקציה את הגרף המתאים לה. גרף מסוים יכול להתאים ליותר מפונקציה אחת.

שם הפונקציה	הגרף המתאים		
	$x_0 = A$	$x_0 = -A$	$x_0 = 0$
המקום כפונקציה של הזמן			
התאוצה כפונקציה של המקום			
התאוצה כפונקציה של הזמן			
המהירות כפונקציה של הזמן			
הכוח כפונקציה של המקום			
הכוח כפונקציה של התאוצה			


גרף I


גרף II


גרף III


גרף IV

13. ** גוף שמסתו 0.2kg הוא מתנד הרמוני חד מימדי ובעל אמפליטודה 0.48 m וזמן מחזור של 5s. ברגע $t=0$ נמצא הגוף בנקודה ששיעורה 0.24 m בתנועה בכיוון החיובי של הציר לפיו נע הגוף. נקודת שיווי המשקל נבחרה כנקודה ראשית של ציר המקום.

א. חשב את הכוח השקול הפועל על הגוף ברגע $t = 0$.

ב. מהי מהירות הגוף ברגע זה?

ג. חשב את מהירות הגוף בנקודת שיווי המשקל.

ד. אחרי כמה זמן יחזור הגוף לנקודה ההתחלתית (x_0) בפעם הראשונה?

ה. שרטט שני גרפים המתארים את האנרגיה הכוללת: האחד כפונקציה של מקום הגוף והשני כפונקציה של הזמן במשך שני מחזורים.

14. * גליל פרספקס חלול אשר שטח חתכו $S = 8cm^2$ ומסתו 0.3kg צף אנכית במים (צפיפות המים $1000kg\backslash m^3$). כאשר הוא בשיווי משקל חלק ממנו טבול בתוך המים וחלק נמצא מעל פני המים. לוחצים על הגליל כך שהו יורד מרחק d - אך עדיין חלק ממנו נשאר מעל פני המים - ומרפים ממנו.

א. שרטט תרשים הכוחות הפועלים על הגליל אחרי שחרורו.

ב. מבלי להציב את הערכים המספריים, רשום את המשוואה הנובעת מהחוק השני של ניוטון ברגע בו טבול הגליל במים במרחק d נוסף. הסבר כיצד תסיק מהמשוואה שרשמת שהגליל מבצע תנועה הרמונית פשוטה.

ג. מהו קבוע המתנד ההרמוני המתקבל כתוצאה מתנודת הגליל (קודם בטא את התשובה באמצעות נתוני השאלה ואחר כך חשב אותו, כולל יחידות).

ד. רשום משוואות המקום, המהירות והתאוצה של המתנד שהתקבל.

ה. מהו הזמן הנדרש לגליל להגיע למחצית האמפליטודה בתנועתו מקצה התנודות?

תשובות לתרגילים

1. היטלי הווקטורים הם:

$a_x = |a|\cos\alpha$

$a_y = -|a|\sin\alpha$

$b_x = -|b|\sin\beta$

$b_y = -|b|\cos\beta$

$c_x = -|c|\sin\gamma$

$c_y = |c|\cos\gamma$

2. ה. (1) $x_{min} = -x_{max} = -5m$

(2) $T = 2s$

(3) $m = 0$

4. ב. $y' = 15\cos(5t)$

ג. $y'' = -75\sin(5t)$

5. א. $b' = -cn\sin(nd)$

ב. $\sin(nd) = \pm\sqrt{1-\cos^2(nd)}$

ג. $b' = \mp cn\sqrt{1-\cos^2(nd)}$

ד. $b' = \mp n\sqrt{c^2-b^2}$

6. א. $m_{max} = 0.4$

ב. $m = 0.14$

ג. $n = 0.03$

ד. $m'(0.25) = -11.26$

ה. $m'_{max} = 12$

7. א. $k_{max} = 2.5$

ב. $k = 2.5$

ג. d=0.136

ד. $k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ה. $k = -2.5\cos(13d)$

8. א. $y = 3.11$

ב. $z = 0.5$

9. ב. $x' = -21\sin(7t)$

ג. $x'' = -147\cos(7t)$

ד. (1) $k = 196\frac{N}{m}$

(6) $x = 3\sin(7t)$

10. ב. 0.8

ג. $y = -0.4\sin(2x)$

ה. 0.4

ו. $y = 0.2\cos(2x)$

ז. $A = 0.2m\ ,\ \omega = 2Hz$

ח. $m = 0.5kg$

ט. $T \approx 3.14s$

11. א. $\alpha = 13^\circ, 49^\circ, 85^\circ, 121^\circ, 157^\circ$

ב. $\alpha = 85^\circ$

ג. $\alpha = 45^\circ, 135^\circ$

ד. $\alpha = 20^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 150^\circ$

ה. $\alpha = 0, 180^\circ$

ו. $\alpha = 0, 60^\circ$

13. א. F = - 0.076N

ב. v = 0.52m/s

ג. $v = \pm 0.6 m/s$

ד. t = 1.66s

14. ב. $\rho \cdot g \cdot S \cdot d = ma$

ג. c = 8 N/m

ה. $t = 0.203s$

פרק י – כבידה

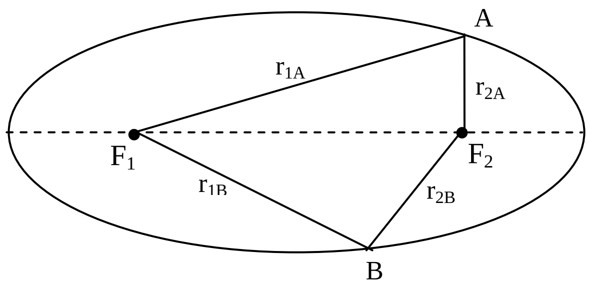
מושגים מתמטיים – אליפסה, מעגל, שברים רגילים, חזקות במעריך טבעי ובמעריך רציונלי, כתיב מדעי, עיגול שברים עשרוניים, פונקציות $y=\frac{k}{x}$ ו- $y=\frac{k}{x^2}$, יחס ישר ויחס הפוך, לינאריזציה של גרף פונקציה לא לינארית, אינטגרל מסוים.

קשר לעולם הפיזיקה – חוקי קפלר, כוח הכבידה, אנרגיה פוטנציאלית כבידתית.

1. נושאים מתמטיים

1.1 אליפסה

- אליפסה היא צורה גיאומטרית דו-ממדית (הנמצאת במישור אחד).
- אליפסה מוגדרת כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות באותו מישור הינו קבוע (תרשים 1).
- שתי הנקודות הקבועות נקראות "מוקדי האליפסה" - F_1 ו- F_2 בתרשים 1.
- ככל שהמוקדים קרובים יותר אחד לשני, כך האליפסה דומה יותר למעגל.



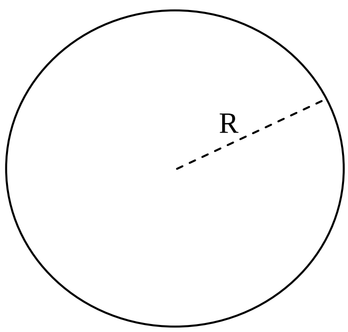
תרשים 1 – אליפסה. $r_{1A}+r_{2A}=r_{1B}+r_{2B}$

1.2 מעגל

R – רדיוס המעגל

היקף המעגל = $2\pi R$

- <u>מעגל</u> (תרשים 2) הוא אוסף הנקודות במישור הנמצאות כולן באותו מרחק R מנקודה קבועה המכונה "מרכז המעגל".
- מעגל יכול להיחשב כמקרה פרטי של אליפסה, בה שני המוקדים מתלכדים במרכז המעגל.



תרשים 2 - מעגל

1.3 שברים רגילים

- שבר רגיל נכתב בצורה $\frac{a}{b}$ או a/b והוא מבטא את היחס בין שני הגדלים a ו- b.
- הגודל a נקרא <u>מונה</u> השבר והגודל b ($b \neq 0$) נקרא <u>מכנה</u> השבר.
- ערך השבר הוא תוצאת החילוק של a ב- b.
- אם המונה קטן מהמכנה, ערך השבר קטן מ- 1 והוא מכונה "שבר פשוט".
- אם המונה גדול מהמכנה, ערך השבר גדול מ- 1 והוא מכונה "שבר מדומה".
- ניתן להפוך שבר מדומה לשבר מעורב, המורכב ממספר שלם ושבר פשוט.
- תוצאה של המכפלה בין מספר כלשהו לבין שבר מדומה - גדולה מהמספר המקורי; תוצאה של המכפלה בין מספר לבין שבר פשוט - קטנה מהמספר המקורי.
- ערך השבר אינו משתנה אם מכפילים או מחלקים גם את המונה וגם את המכנה באותו מספר (השונה מאפס). פעולות אלו מכונות "הרחבה" ו"צמצום" בהתאמה.
- ניתן להתייחס למכנה כמספר החלקים השווים בהם חולק שלם ולמונה כמספר החלקים.
- על מנת לחבר או לחסר בין שני שברים יש להביא אותם למצב שיש להם אותו מכנה (מכנה משותף) על ידי הרחבה או צמצום מתאימים.
- אפשר להכפיל בין שני שברים שאינם מעורבים על ידי הכפלת שני המונים אחד בשני ושני המכנים אחד בשני.
- לשם פשטות החישובים עם שברים רגילים, מומלץ לבצע כל הצמצומים האפשריים טרם ביצוע הפעולות הנדרשות.

1.4 חזקות

- חזקה היא ביטוי שצורתו a^m.
- a מכונה <u>בסיס</u> החזקה ו- m מכונה <u>מעריך</u> החזקה.

- משמעות הביטוי a^m במקרה ש- m הינו מספר טבעי, היא מכפלה של a בעצמו m פעמים, כלומר: $a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{m פעמים}}$. משמעות זאת נחשבת כהגדרה ראשונית של חזקה.

- המעריך יכול להיות מספר רציונלי ואז צורת החזקה היא $a^{\frac{p}{q}}$.
- חזקה במעריך רציונלי יכולה להיכתב גם בעזרת שורש: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
- <u>פעולות עם חזקות</u>

כללי החישוב עם חזקות נובעים ישירות מההגדרה הראשונית שמכלילים אותה גם למקרים בהם המעריך איננו מספר טבעי.

- חזקות עם אותו בסיס

(1) מכפלה: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) חילוק: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) חזקה: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} = \left(a^n\right)^m$

(4) מכלל (2), במקרה הפרטי בו $m=n$ מקבלים: $\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0$

מכאן נובעת מסקנה חשובה <u>שחזקה מורכבת מבסיס כלשהו במעריך אפס שווה לאחד</u>.

(5) מכלל (2), במקרה הפרטי בו $m=0$ ובהתחשב גם בכלל (4) מקבלים: $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

- חזקות עם בסיסים שונים

(6) מכפלה: $a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$

(7) חילוק: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(8) מכלל (5) נובע: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$

<u>1.5 כתיב מדעי</u>

<u>עיגול מספרים</u>

- אם תוצאת חישוב היא שבר עשרוני בעל ספרות רבות אחרי הנקודה העשרונית, אזי מעגלים את התוצאה על ידי כתיבת רק חלק מהספרות המופיעות מיד אחרי הנקודה העשרונית.
- הספרה האחרונה שנרשמת במספר המעוגל נקבעת על פי הספרה שהייתה אחריה במספר המקורי. אם הספרה שהייתה אחריה היא קטנה מ- 5, אזי הספרה האחרונה שנרשמת היא כפי שהייתה במספר המקורי; אם הספרה שהייתה אחריה היא 5 ומעלה - אזי מגדילים ב- 1 את הספרה האחרונה שמשאירים. לדוגמה המספר 3.232 יקורב כ- 3.23, אבל המספר 3.237 יקורב כ- 3.24.

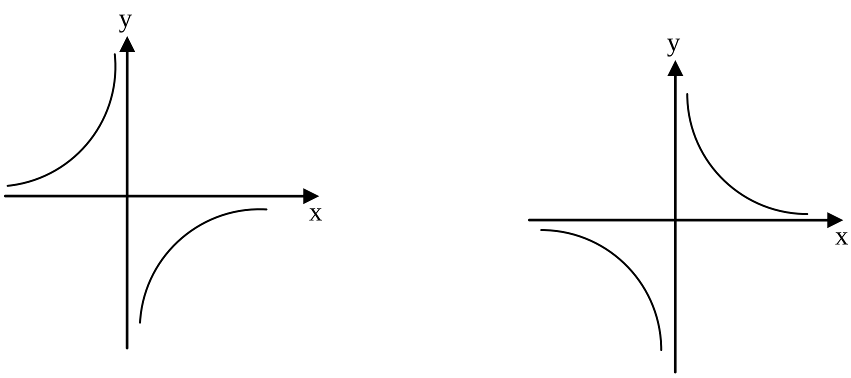
<u>שימוש בחזקות עם בסיס 10</u>

- במדעים מדויקים מקובל לכתוב מספרים גדולים וקטנים כמכפלה בין שבר עשרוני שערכו המוחלט בין 1 (כולל) ל- 10 לבין חזקה עם בסיס 10.
- נהוג לעגל את השבר העשרוני עד לספרה השנייה אחרי הנקודה העשרונית (עד למאיות).
- במספרים קטנים מ- 1 מעריך החזקה שלילי.
- במספרים גדולים מ- 10 מעריך החזקה חיובי.

1.6 הפונקציות $y=\frac{k}{x}$ ו- $y=\frac{k}{x^2}$ (k – מספר קבוע)

- לשתי הפונקציות תחום הגדרה $x \neq 0$.
- לגרף הפונקציה $y=\frac{k}{x}$ שני חלקים סימטריים ביחס לראשית הצירים והצירים עצמם מהווים אסימפטוטות אופקית ואנכית (תרשים 3).

הפונקציה $y=\frac{k}{x}$ היא מונוטונית, כלומר היא יורדת בכל תחום ההגדרה או עולה בכל תחום ההגדרה, בהתאם לסימן המספר הקבוע (פרמטר) k.



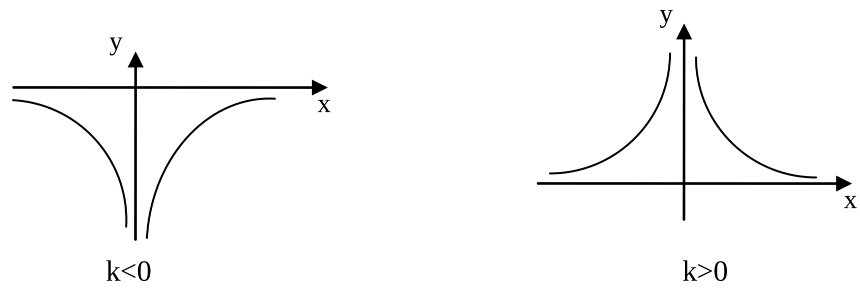
k>0 - פונקציה יורדת

k<0 - פונקציה עולה

תרשים 3 - גרף הפונקציה $y=\frac{k}{x}$

- אומרים ששני המשתנים x ו- y בפונקציה $y=\frac{k}{x}$ נמצאים <u>ביחס הפוך</u> זה לזה, פרוש הדבר שאם אחד מהם <u>גדל</u> פי N, השני <u>קטן</u> פי N.

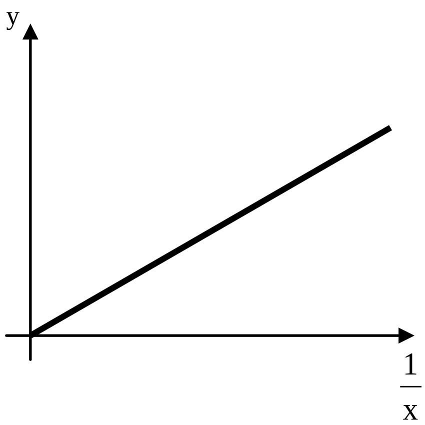
- הפונקציה $y=\frac{k}{x^2}$ אינה מונוטונית וצורתה תלויה בסימן המספר הקבוע (פרמטר) k (תרשים 4).
- הפונקציה $y=\frac{k}{x^2}$ מתארת יחס הפוך בין y לבין x^2.



תרשים 4 - גרף הפונקציה $y = \frac{k}{x^2}$

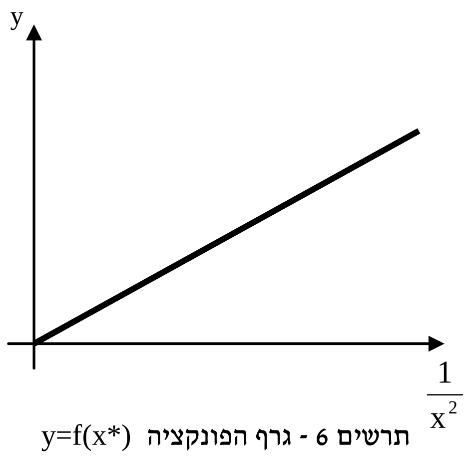
1.7 יישור (ליניאריזציה) גרף של פונקציה לא לינארית

- יישור הוא פעולה שמאפשרת לקבל פונקציה קווית (לינארית) מפונקציה לא לינארית, על ידי החלפת אחד משני המשתנים במשתנה חדש.
- אם בין שני משתנים יש קשר לינארי בכלל או יחס ישר בפרט (לגבי שני קשרים אלה – ראה סעיף 1.2 בפרק א), אין צורך ביישור.
- לדוגמה, אם נתונה הפונקציה $y = \frac{k}{x}$ או הפונקציה $y = \frac{k}{x^2}$, אשר להן גרפים לא לינאריים (ראה תרשימים 3 ו- 4 בפרק זה), היישור (כלומר גרף קו ישר) מתקבל בהתאם לתבניות חדשות $y = k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ או $y = k \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$ בהתאמה (תרשימים 5 ו- 6). בין הסוגריים רשום המשתנה הבלתי תלוי שמשמש לבניית כל גרף.



תרשים 5 - גרף הפונקציה $y=f(x^*)$

כאשר $x^* = \left(\frac{1}{x}\right)$

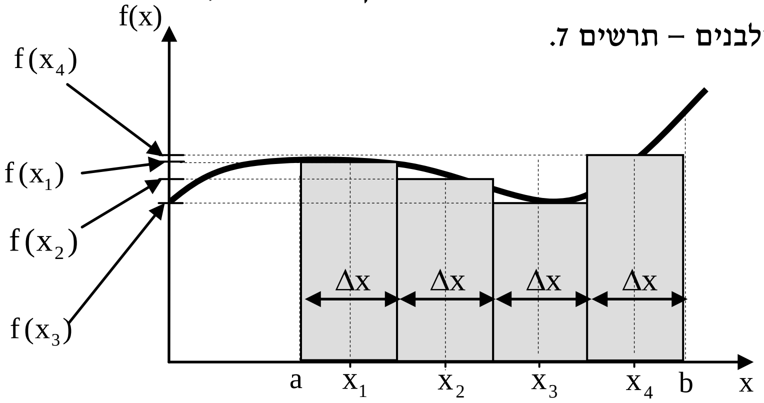


תרשים 6 - גרף הפונקציה $y=f(x^*)$

כאשר $x^* = \left(\frac{1}{x^2}\right)$

1.8 אינטגרל מסוים של פונקציה

- בעזרת אינטגרל מסוים אפשר לחשב שטח שבין גרף פונקציה לבין ציר המשתנה הבלתי תלוי.
- החישוב המקורב של השטח יכול להיעשות על ידי חלוקתו למלבנים (כי חישוב שטח מלבן הוא פשוט) וחיבור שטחי כל המלבנים – תרשים 7.



תרשים 7 - קירוב שטח כסכום שטחי מלבנים

- השטח המקורב הוא סכום שטחי המלבנים שנבנו:

$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\cdot\Delta x$$

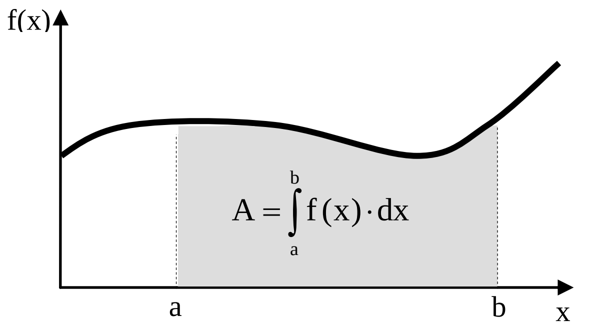
- הקירוב הולך ומשתפר ככל שהרוחב Δx של המלבנים שנבנו הולך וקטן, וכך מספר המלבנים הולך וגדל. "הקירוב" האופטימלי (כלומר הקירוב שייתן ערך מדויק של השטח - תרשים 8) מתקבל כאשר רוחב המלבנים שואף לאפס וכתוצאה מכך מספר המלבנים שואף לאינסוף:

$$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

בכתיב זה dx מסמן את הרוחב הקטן מאד של כל אחד מהמלבנים, f(x) הוא הגובה של המלבן הנבנה בסביבתו הקרובה מאד של x

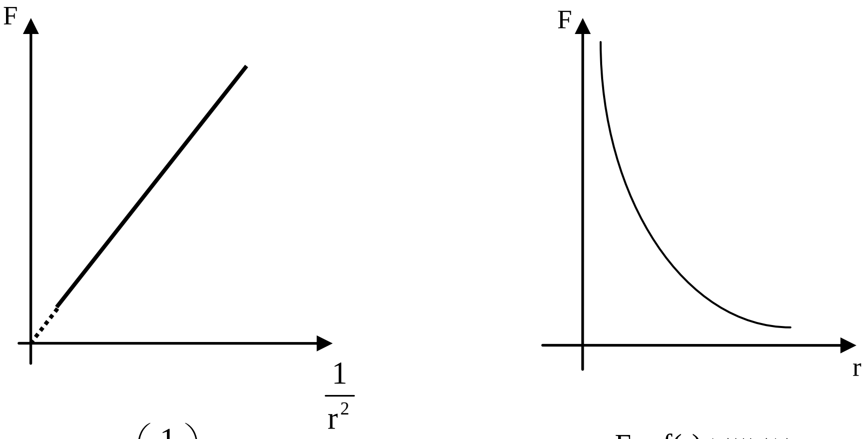
והסימן $\int_a^b$ מסמן את האינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) מ- x = a עד ל- x = b.



תרשים 8 - השטח המחושב באמצעות אינטגרל מסוים

2. התאמת נושאים מתמטיים לעולם הפיזיקה

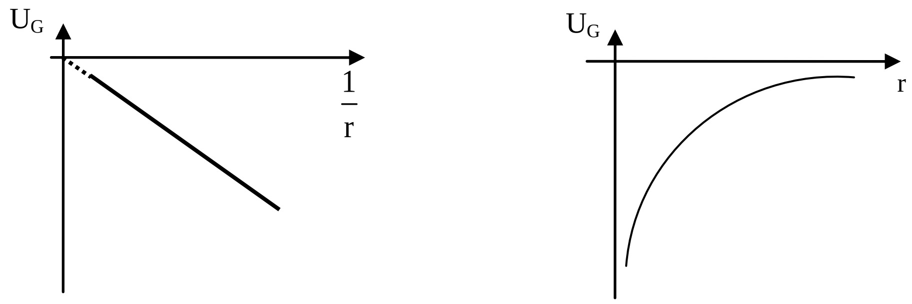
- כפי שקפלר הסיק, המסלולים של כוכבי הלכת סביב השמש הם אליפטיים אבל, בגלל שהמוקדים שלהם קרובים מאד זה לזה, ניתן להתייחס למסלולים אלה כאל מעגלים.
- קשר בצורה $y^2 = k \cdot x^3$ מופיע בחוק השלישי של קפלר: $T^2 = k \cdot r^3$. כלומר ריבוע זמן המחזור של לווין פרופורציוני (נמצא ביחס ישר) לחזקה שלישית של רדיוס מסלולו, כאשר קבוע הפרופורציה תלוי במסת הכוכב סביבו חג הלווין: $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ (G - קבוע הכבידה העולמי).
- הכתיב המדעי וחישובים עם חזקות נחוצים בפרק זה מאחר שהערכים המספריים של הגדלים הפיזיקליים המעורבים בו הם קטנים מאד (כמו קבוע הכבידה העולמי $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$) או גדולים מאד (כמו למשל מרחקים מסדר גודל של $10^6 m$ או מסות מסדר גודל של $10^{24} kg$).
- הפונקציות $y = \frac{k}{x^2}$ ו- $y = \frac{k}{x}$ מתקשרות לביטויים של כוח הכבידה $F = G\frac{Mm}{r^2}$ ושל אנרגיה פוטנציאלית כבידתית $U_G = -\frac{GMm}{r}$ בהתאמה.
- אפשר לתאר את הקשר בין כוח הכבידה שמפעילים זה על זה שני גופים בעלי מסות M ו- m לבין המרחק r בין מרכזיהם על ידי היפרבולה או על ידי קו ישר בעקבות לינאריזציה (תרשים 9).



פונקציה $F = f\left(\frac{1}{r^2}\right)$ פונקציה $F = f(r)$

תרשים 9 - הקשר בין כוח למרחק

- את הקשר בין האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית של מערכת מורכבת משני גופים בעלי מסות M ו- m לבין המרחק r בין מרכזיהם אפשר לתאר על ידי היפרבולה או על ידי קו ישר בעקבות לינאריזציה (תרשים 10).



פונקציה $U_G = f\left(\frac{1}{r}\right)$ פונקציה $U_G = f(r)$

תרשים 10 - הקשר בין אנרגיה פוטנציאלית למרחק

- האינטגרל המסוים מאפשר לקבל את הביטוי $U_G = -\frac{GMm}{r}$ של אנרגיה פוטנציאלית כבידתית של זוג גופים בעלי מסות M ו- m יחסית לאינסוף מביטוי כוח הכבידה הפועל בין אותם גופים $F = G\frac{Mm}{r^2}$.

3. תרגילים

3.1 תרגילי מתמטיקה

1. בצע את הפעולות הרשומות בביטוי הבא והצג את תשובתך בכתב מדעי:

$$\frac{3.8\cdot10^{6}\cdot26\cdot10^{5}}{(360\cdot10^{3})^{2}}\cdot6.67\cdot10^{-11}$$

2. $a^2 = 8\cdot10^8\cdot b^3$

א. אם $a = 2.3\cdot10^6$ מצא את b

ב. אם $b = 2.3\cdot10^6$ מצא את a

3. $(c+d)^2 = 6.67\cdot10^{-11}\cdot f^3$

א. אם $f = 9\cdot 10^9$ ו- $d = 4\cdot10^9$ מצא את c

ב. אם $c = 9\cdot 10^9$ ו- $d = 4\cdot10^8$ מצא את f

ג. אם $d = 9\cdot 10^8$ ו- $c=-4\cdot10^9$ מצא את f

4. לפי ביטוים הנתונים השלם את המשפטים המופיעים אחריהם:

א. אם $y=\frac{67}{x}$, ככל ש- x גדל, y ...

ב. אם $y=\frac{67}{x^2}$, ככל ש- x קטן, y ...

ג. $y=-\frac{67}{x}$, ככל ש- x גדל, y ...

ד. אם $y=-\frac{67}{x^2}$, ככל ש- x קטן, y ...

ה. אם $y=\frac{67}{-x}$, ככל ש- x גדל, y ...

ו. אם $y=\frac{67}{(-x)^2}$, ככל ש- x קטן, y ...

5. נתונים שני מספרים n ו-p : $n = 0.33\cdot10^{24}$, $p = 102.44\cdot10^{22}$.

א. איזה מספר גדול יותר? נמק תשובתך.

ב. בכמה המספר הגדול גדול מהמספר הקטן?

ג. פי כמה המספר הגדול גדול מהמספר הקטן?

ד. פי כמה המספר הקטן גדול מהמספר הגדול?

6. בצע את פעולות החישוב הנדרשות לפתרון תרגילים הבאים באמצעות מחשבון כיס, <u>מבלי לרשום תוצאות ביניים</u>:

א. $$\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}\cdot7.3\cdot10^{22}}{(1.5\cdot10^{11})^2}$$

ב. $$\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3.84\cdot10^3)^3}{6.67\cdot10^{-11}\cdot(27.3\cdot24\cdot60\cdot60)^2}$$

7. חשב את s מהמשוואה הבאה:

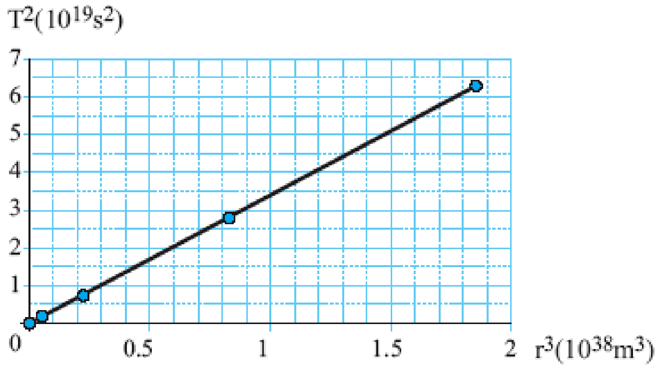
$$\frac{1}{2}s^2-10\cdot(6.4\cdot10^6)=-10\cdot\frac{(6.4\cdot10^6)^2}{6.9\cdot10^6}$$

8. חשב את הסכום ואת ההפרש בין e ו- j הבאים:

$$e=-\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{24}\cdot6\cdot10^4}{2\cdot8.31\cdot10^9}\quad,\quad j=\frac{-6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot2\cdot10^4}{2\cdot10^9\cdot1.83}$$

<u>3.2 תרגילי מעבר ופיזיקה</u>

9. מצא בעזרת הגרף הבא את הצפיפות הממוצעת של השמש, אם ידוע שרדיוסה $6.96\cdot10^8\text{m}$.



10. * נתון ריבוע

א. אם אורך כל צלע הוא a, מהו אורך אלכסוני הריבוע?

ב. אם אורך מחצית כל אלכסון הוא a, מהו אורך צלעו של הריבוע?

מעמידים בכל אחד מקודקודי הריבוע גוף שמסתו m. בטא את תשובותיך באמצעות נתוני השאלה ובאמצעות קבועים אוניברסליים.

ג. מהו כוח השקול שפועל על כל אחד מגופי המערכת?

ד. מהי האנרגיה האגורה במערכת ומה סוגה? הסבר תשובתך.

ה. משחררים את הגופים.

(1) תאר במילים את מה שיתרחש במערכת לאחר השחרור.

(2) עד לאיזו מהירות מרבית יגיע כל אחד מהגופים? נמק תשובתך.

(3) מהו התנע הכולל של מערכת הגופים אחרי השחרור? האם מתקיים במערכת זאת חוק שימור התנע? פרט תשובתך.

11. *א. העזר בטבלאות המתאימות מדף הנוסחאות והנתונים בפיזיקה וחשב עבור כל גרמי השמיים המופיעים באותן טבלאות את:

(1) הצפיפות הממוצעת. פרט צעדיך והסבר מדוע התבקשת לחשב את הצפיפות <u>הממוצעת</u>.

(2) תאוצת הנפילה החופשית על פניהם.

ב. מדוע לדעתך שני גרמי שמיים בעלי מסות זהות מפעילים כוחות כבידה שונים על גופים קטנים בעלי מסות שוות הנמצאים על פניהם? הסבר.

12. * שני כדורים שווי גודל ובעלי מסות m ו- 2m מונחים על משטח אופקי חלק. רדיוסו של כל כדור הוא R והכדורים מוחזקים כך שהמרחק בין מרכזיהם הוא 16R.

בטא את תשובותיך לסעיפים הבאים באמצעות G ,R ,m.

א. מהו כוח המשיכה הכבידתי (הגרביטציוני) בין הכדורים?

ב. משחררים את הכדורים והם נעים זה לקראת זה הודות לכוח הכבידה הפועל ביניהם. בטא את גודל כוח המשיכה בין שני הכדורים, כאשר המרחק בין מרכזיהם משתנה בקפיצות של R מ- 16R עד ל- 2R.

ג. נתונים: R = 0.8m ,m = 6ton. שרטט גרף כוח המשיכה בין הכדורים כפונקציה של המרחק בין מרכזיהם.

ד. (1) בחר משתנה חדש שיאפשר לינאריזציה של הגרף שהתקבל בסעיף ג, בנה טבלה מתאימה ובעזרתה שרטט גרף חדש שקו המגמה שלו הוא לינארי.

(2) חשב את שיפועו של קו המגמה ורשום את יחידותיו.

13. * תרגיל זה מתייחס לכוכב הלכת נפטון.

א. העזר בנספח לבחינות הבגרות ברמה של 5 י״ל שברשותך וחשב את תאוצת הנפילה החופשית ב- 10 נקודות **מעל פני** נפטון בקפיצות של 1000 ק״מ, החל מגובה 0. רשום את התוצאות בטבלה מתאימה.

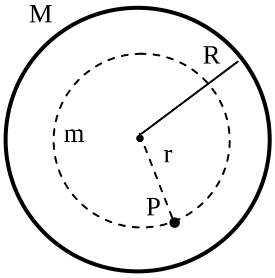
ב. שרטט גרף של תאוצת הנפילה החופשית כפונקציה של המרחק ממרכז נפטון. מהי צורת הגרף?

ג. בחר משתנה חדש לצורך לינאריזציה של הגרף. הוסף שורה או עמודה לטבלה מסעיף א׳ ורשום בה את הערכים של המשתנה החדש.

ד. שרטט גרף חדש שהוא קו ישר וחשב את שיפועו. מה מייצג השיפוע?

ה. פי כמה גדלה תאוצת הנפילה החופשית אם מקטינים את גובה הנקודה מפני הכוכב מ- 3R ל- 2R (R – רדיוס הכוכב)? נמק.

ו. משחררים גוף בגובה h מעל פני נפטון. אם הגבול העליון של משך נפילת הגוף הוא 3900s והגבול התחתון הוא 2000s, מהו הגובה h?



14. ** אפשר להוכיח שניתן לחשב את גודל עוצמת שדה הכבידה בנקודה כלשהי P הנמצאת או מחוץ או בתוכו של גרם שמימי כדורי (ראה תרשים עבור המקרה שהנקודה P נמצאת בתוך הגרם השמימי) באמצעות הקשר הבא (בהנחה שגרם השמימי הינו הומוגני, כלומר צפיפותו אחידה): $4\pi Gm = gA$,

כאשר g - גודל עוצמת שדה הכבידה בנקודה P,

A - שטח של מעטפת כדורית העוברת דרך הנקודה P ומרכזה במרכז הכוכב,

m - מסה שבתוך המעטפת (מתברר שרק מסה הנמצאת בתוך המעטפת משפיעה על התאוצה).

כוכב שרדיוסו R ומסתו M נמצא באיזשהו מקום בחלל. רוצים לחשב את גודל עוצמת שדה הכבידה g בנקודה S הנמצאת במרחק r_S ממרכז הכוכב.

א. שרטט תרשים בו הכוכב והמעטפת הכדורית דרך נקודה S שתשמש לחישוב.

ב. בטא את שטח הפנים של המעטפת באמצעות נתוני השאלה.

ג. בטא את המסה m הנמצאת בתוך המעטפת באמצעות נתוני השאלה.

ד. העזר בנוסחה שבתחילת התרגיל ובטא את גודל עוצמת שדה הכבידה בנקודה S.

ה. שרטט גרף של g כפונקציה של r מ- $r = 0$ עד $r = R$. האם הגרף הוא לינארי? אם לא- הסבר מדוע, ואם כן- מה הביטוי של שיפוע הגרף?

ו. עכשיו עליך לבטא את גודל עוצמת שדה הכבידה בנקודה L הנמצאת מחוץ לכוכב, זאת אומרת $r_L > R$. עשה זאת לפי אותם הצעדים. שים לב! אתה צריך להגיע לנוסחה הידועה $g = \frac{GM}{r^2}$.

ז. הוסף לגרף ששרטטת בסעיף ה' חלק נוסף כאשר r>R. מהי מסקנתך?

ח. מהו הקשר בין עוצמת שדה הכבידה בנקודה מסוימת לבין תאוצת הנפילה החופשית של גוף הנמצא באותה נקודה?

15. ** אילו היה אפשר לחפור מנהרה העוברת דרך מרכז כדור הארץ ואילו צפיפותו של כדור הארץ הייתה אחידה לחלוטין, אזי גוף היה נע בתוך המנהרה כמתנד הרמוני, כלומר בתנועה הרמונית פשוטה.

א. הוכח שהכתוב מעלה נכון.

ב. שרטט גרף של הכוח הפועל על הגוף שבמנהרה כפונקציה של המקום יחסית למרכז כדור הארץ וציין מהי משמעות הפיזיקלית של שיפוע הגרף במידה והוא לינארי.

ג. איך היה משתנה הגרף אילו היה מדובר על גֶרם שממי אחר בעל צפיפות אחידה?

ד. אם מסתו של הגוף שהוכנס למנהרה היא m, בטא את זמן המחזור של תנודותיו באמצעות M_E, R_E, G ו- m.

ה. איזה עיקרון בסיסי מצדיק את העובדה שבמרכז כדור הארץ שקול הכוחות על גוף שיונח בנקודה זאת שווה לאפס?

16. * כאשר טיל שמסתו m משוגר אנכית מפני פלנטה שמסתה M ורדיוסה R, הוא מגיע למרחק מרבי 4R ממרכז הפלנטה. כאשר אותו טיל משוגר באותה מהירות ההתחלתית אבל לא אנכית, הוא מגיע למרחק מרבי 3R ממרכז הפלנטה.

התעלם מסיבוב הפלנטה סביב צירה ובטא את תשובותיך לסעיפים הבאים באמצעות m, M, R, G או חלק מהם.

א. מהו גודלה של מהירות שיגור הטיל?

ב. באיזו זווית יחסית לאופק שוגר הטיל במקרה השני?

ג. איזו תוספת אנרגיה יש להעניק לטיל כאשר הוא נמצא בגובה מכסימלי, כדי שייכנס למסלול מעגלי סביב הפלנטה בגובה זה? התייחס לכל אחד משני המקרים.

ד. מהי האנרגיה המינימלית שיש להוסיף לטיל בשיא הגובה כדי שיימלט מהשפעת הפלנטה?

17. * נתון כוכב לכת שמסתו M וצפיפותו אחידה ρ.

א. משגרים אנכית מפני כוכב הלכת "רובוט- מדען" שמסתו m, כך שהוא מגיע עד לגובה מקסימאלי h מעל פני הכוכב. בטא את מהירות השיגור באמצעות נתוני השאלה.

ב. האנושות גרמה לאסון אקולוגי של כוכב הלכת וכתוצאה מכך הוא התכווץ מבלי לשנות את מסתו. הרדיוס החדש קטן פי שניים מהרדיוס המקורי. בטא את תאוצת הכובד החדשה על פני הכוכב באמצעות נתוני השאלה.

18. * לווין שמסתו טון מקיף תחילה את הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו r . לאחר זמן מה הלוויין הועבר למסלול מעגלי חדש שהיקפו מהווה רבע מהיקפו המקורי.

א. פי כמה, אם בכלל, השתנה זמן המחזור של הלוויין?

ב. פי כמה, אם בכלל, השתנתה מהירות הקווית של הלוויין?

ג. בכמה, אם בכלל, השתנתה האנרגיה הכוללת של הלוויין, אם רדיוס מסלולו המקורי היה שלושים ושישה אלף קילומטר?

19. * מדענים חישבו את האנרגיה הפוטנציאלית במקרה שטיל שמסתו 1ton שוגר מפני כוכב הלכת אורנוס בכיוון אנכי. בטבלה הבאה רשומות תוצאות החישובים:

מרחק ממרכז אורנוס $r\ (10^6 m)$	אנרגיה פוטנציאלית $U_G\ (10^{10} J)$
21.6	-26.9
43.2	-13.4
64.8	-8.95
86.4	-6.71
108	-5.37
129.6	-4.48
151.2	-3.84
172.8	-3.36

א. האם האנרגיה גְדֵלה או קְטֵנה עם המרחק? הסבר.

ב. שרטט גרף של אנרגיה פוטנציאלית כפונקציה של מרחק הטיל ממרכז הכוכב.

ג. האם האנרגיה הפוטנציאלית שייכת לטיל, לכוכב או למערכת טיל - כוכב? הסבר.

ד. הוסף עמודה לטבלה עם משתנה חדש $\frac{1}{r}$ ומלא אותה. אל תשכח את היחידות!

ה. שרטט גרף חדש של אנרגיה פוטנציאלית כפונקציה של $\frac{1}{r}$. האם הפונקציה עולה או יורדת? הסבר.

ו. חשב בעזרת הגרף את מסתו של אורנוס והשווה בין התוצאה שקיבלת לבין נתון בנוסחאון. בטא באחוזים את השגיאה שבתוצאתך.

תשובות לתרגילים

.3 א. $c_1 = 2.97\cdot10^9$ ו- $c_2 = -10.97\cdot10^9$

.6 (1) $4.33\cdot10^{20}$ (2) $6.02\cdot10^9$.

.7 $s = 3.05\cdot10^3$

.8 סכום $-2.67\cdot10^9$; הפרש $1.71\cdot10^9$

.9 $\rho = 2\cdot10^{-8} kg/m^3$

.10 ג. $\frac{Gm^2}{a^2}\cdot\frac{4\sqrt{2}+2}{4}$

ה. (2) $\sqrt{\frac{Gm}{2a}(4+\frac{2}{\sqrt{2}})}$

.12 ד. (2) אחת האפשרויות - השיפוע הוא

$$\frac{2Gm^2}{R^2} = 7.5\cdot10^{-3} N$$

.13 ו. $2.3\cdot10^7 m$

.15 ד. $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}}$

.16 א. $v_0 = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$ בשיגור אנכי

$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{6R}}$ בשיגור בזווית

ב. 70.53^o

ג. $\frac{GMm}{8R}$ בשיגור אנכי

$\frac{GMm}{12R}$ בשיגור בזווית

ד. $\frac{GMm}{4R}$

.17 א.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M\cdot h}{\left(\frac{3\cdot M}{4\cdot\pi\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{3\cdot M}{4\cdot\pi\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{3}}+h\right)}}$$

ב. $g' = \frac{GM}{\left(\frac{3M}{32\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}$

18 א. $1/8$

ב. 2

ג. הטונה ב- $1.668\ 10^{11}$ J