

אי-ודאות במדידה וכתובה מדעית של ערך נמדד

המדידה היא הרכיב הבסיסי של כל ניסוי. אולם, בין אם מערכת המדידה מכילה ציוד יקר ומשוכלל ובין אם המדידה היא ידנית, באמצעות מד זווית וסרגל, לעולם לא תהיה תוצאת המדידה זהה לחלוטין לגודל הנמדד. גודלו של ההפרש בין תוצאת המדידה לגודל הנמדד נקרא "שגיאת המדידה":

$$\text{שגיאת המדידה} = \left| \frac{\text{הגודל הנמדד} - \text{תוצאת המדידה}}{\text{הגודל הנמדד}} \right|$$

שיטת מדידה מוצלחת תוביל לשגיאת מדידה קטנה ביחס לגודל הנמדד. היחס בין שגיאת המדידה לגודל הנמדד נקרא "שגיאה יחסית". נהוג להציג את השגיאה היחסית על ידי אחוזים מהגודל הנמדד, צורת הצגה זו נקראת "אחוז השגיאה":

$$\text{אחוז השגיאה} = 100 \times \frac{\text{הגודל הנמדד/שגיאת המדידה}}{\text{הגודל הנמדד}} = 100 \times \text{השגיאה היחסית}$$

כך לדוגמא, מטוטלת פוקו (*Foucault pendulum*), אשר נתלתה ב-1851 בפנתיאון בפריז, הייתה מורכבת מכדור תותח בעל מסה של כ-28 ק"ג אשר היה תלוי על מיתר מתכתי שאורכו כ-67 מטר¹. אם היינו מודדים את מסת הכדור על ידי מאזני-אמבט, שהשימוש בהם גורם לאי-ודאות בתוצאת המדידה של כ-0.5 ק"ג, הייתה השגיאה היחסית $0.0179 = 0.5\text{kg}/28\text{kg}$, כלומר 1.8% אחוזי שגיאה.

שאלה: אם היינו מודדים את אורכו של המיתר המתכתי באמצעות סרט מדידה של תופרים אשר מייצר אי-ודאות בתוצאת המדידה של כ-1 מ"מ – מה היה אחוז השגיאה? האם לדעתך נכון יהיה למדוד את המיתר בעת שהמטוטלת תלויה עליו או לא? האם לדעתך יש חשיבות למדידת (ורישום) הטמפרטורה של המיתר בעת המדידה?

היות ולכל גודל נמדד יש אי-ודאות, נהוג לבטא זאת בצורת הכתיבה שלו. הדבר בא לידי ביטוי במספר הספרות אותו מציגים: 1.2345m היא כתיבה מקובלת של אורך אשר אי-הודאות במדידתו היא מסדר גודל של 0.0001m , בעוד ש 1.2m היא כתיבה מקובלת של אורך אשר אי-הודאות במדידתו היא מסדר גודל של 0.1m . כלומר – הספרה האחרונה הנרשמת אמורה להיות הספרה היחידה בה יש אי-ודאות. הקפדה על כתיבה מדעית זו נקראת שמירה על "ספרות משמעותיות" בלבד. כך לדוגמא, אם מסת הכדור במטוטלת המקורית של פוקו אכן נמדדה במאזני-אמבט, אפשר היה לכתוב אותה בצורה 28kg אך אסור היה לכתוב אותה בצורה 28.00kg . כך לדוגמא, אם על פי הערכת המשטרה השתתפו בהפגנה כ-150,000 איש, כאשר באומדן זה יש אי-ודאות של 30,000 איש, כתיבה ראויה של הערכת המשטרה תהיה 1.5×10^5 מפגינים.

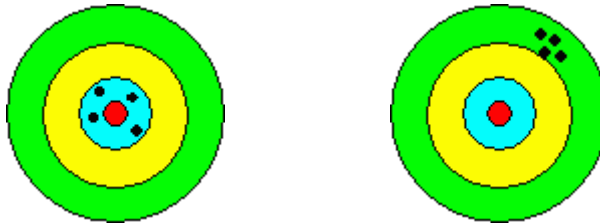
שאלה: פרס הנובל בפיזיקה לשנת 2005 ניתן בחלקו לתיאודור האנש (Theodor W. Hansch), אשר פיתח שיטת מדידה סופר-מדויקת למדידת תדירות האור הנפלטת מגז מימן. אי הודאות במערכת המדידה שהוא פיתח אינו עולה על 46Hz . התדירות אותה הוא מדד הייתה $2,466,061,413,187,103\text{Hz}$. רשום את תוצאת המדידה בכתיבה המקובלת, תוך שימוש בחזקות של עשר ובספרות משמעותיות בלבד.

¹ ראה http://www.phys.unsw.edu.au/PHYSICS!/FOUCAULT_PENDULUM/foucault_pendulum.html

מקורות שגיאה שיטתיים ואקראיים

ניתן לחלק את הסיבות לשגיאה במדידה לשני סוגים: הפרעות שיטתיות והפרעות אקראיות. למקור שגיאה שיטתי יש חוקיות מסוימת בעוד שמקור שגיאה אקראי יוצר "רעש" – הוא לעיתים גורם לסטייה גדולה, לעיתים לסטייה קטנה, לעיתים הסטייה היא בכיוון אחד ולעיתים בדיוק בכיוון ההפוך.

אם נדמה את תהליך המדידה לתהליך קליעה במטרה, יקל עלינו להבין את ההבחנה בין סוגי שגיאה אלו². התבונן בשני השרטוטים הבאים המתארים את הישגי הקליעה של שני מתחרים:



כפי שניתן לראות, סימני הפגיעה במטרה הימנית קרובים מאוד זה לזה, אך כולם רחוקים ממרכז המטרה. ניכר שבכל היריות למטרה היה גורם שיטתי כלשהו אשר גרם לסטייה ימינה ולמעלה של החצים (אולי בטכניקת הקליעה? אולי במבנה הקשת? אולי כתוצאה של רוח שנשבה?). באנלוגיה לתהליך המדידה – זוהי **שגיאה שיטתית**: ישנו גורם קבוע אשר שוב ושוב מטה את תוצאות המדידה באותה החוקיות וגורם לסטייה באותו הכיוון מהערך האמיתי. לעומת זאת, מתוך התבוננות בסימני הפגיעה במטרה השמאלית ניכר שבכל ניסיון ירי ישנה סטייה לכיוון אחר באופן מקרי. באנלוגיה לתהליך המדידה – זוהי **השגיאה האקראית**. אם הגורם האקראי הוא משמעותי, המרחק בין כל אחת מנקודות הפגיעה לבין המרכז יהיה גדול, אך קרוב לוודאי מרכז המטרה יהיה באזור הנפגע.

כך לדוגמא, אם נרצה למדוד את זמן המחזור (=הזמן בו נמשכת תנודה אחת, הלך וחזור) של מטוטלת באמצעות שעון-עצר (סטופר) ניתקל בוודאי בחוסר דיוק שינבע מאופן המדידה הידני: זמן התגובה האנושי, הזמן החולף בין הגעת המידע אל העין לבין פעולת היד (הלחיצה על התחל/הפסק בשעון-העצר), נמשך כמה עשיריות השנייה ואינו מספר קבוע. על מנת להקטין את חוסר הדיוק בקביעת מועד השחרור, ייתכן ונבקש מעמיתנו המשחרר את המטוטלת לספור לאחור בקול רם ולהכין אותנו לקראת השחרור (ארבע, שלוש, שניים, אחד... התחל!), על מנת להקטין את חוסר הדיוק בקביעת מועד סיום התנודה (=החזרה אל נקודת ההתחלה), קרוב לוודאי נתחיל להזיז את אצבענו לעבר כפתור ה"הפסק" כבר כאשר המטוטלת מתקרבת אל נקודת ההתחלה ומהירותה הולכת וקטנה. **פעולות אלו נועדו למנוע שגיאה שיטתית** – הספירה לאחור מנסה למנוע עיכוב בין השחרור לבין הלחיצה על כפתור ה"התחל" והדריכות בעת שהמטוטלת מאיטה ומתקרבת לסוף תנודתה מנסה למנוע עיכוב בין סיום התנודה לבין הלחיצה על כפתור ה"הפסק". אם לא נשתמש בטכניקות מסוג זה למדידה, עשויה מדידת זמן המחזור להניב ערך גבוה יותר מהערך האמיתי בכמה עשיריות השנייה – **שגיאה שיטתית**. אך גם אם נשתמש בטכניקת מדידה אשר תצמצם את השגיאה השיטתית, עדיין – מתוקף מגבלותינו הביולוגיות – לא נוכל לחזוץ על כפתור ה"התחל" בדיוק בהתחלה ועל כפתור ה"הפסק" בדיוק בסיום. לעיתים נלחץ קצת לפני הזמן ולעיתים קצת אחרי הזמן – **שגיאה אקראית**. לפיכך, אם נחזור על המדידה מספר פעמים, קרוב לוודאי שנקבל ערכים שונים.

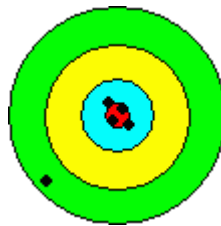
גם מהאנלוגיה לקליעה למטרה וגם מדוגמת המטוטלת ניתן להבין כי **ניתן לזהות שגיאה אקראית על ידי חזרה שוב ושוב על המדידה – במידה ומתקבל "רעש", כלומר תוצאות שונות במעט בכל פעם שחוזרים על המדידה, כנראה שיש גורם שגיאה אקראי בפעולה**. אם התוצאות חוזרות על עצמן במדויק, שוב ושוב, בעת שחוזרים על המדידה, ניתן לקבוע כי גודלה של השגיאה האקראית אינו עולה על חוסר הדיוק בתצוגת כלי המדידה.

² מבוסס על <http://phoenix.phys.clemson.edu/tutorials/ap/index.html>

נניח, לשם דוגמא, כי חזרה על מדידת זמן התנועה של המטוטלת (כפי שתוארה קודם לכן) הניבה בכל פעם תוצאות שונות, כמפורט להלן: 0.87s, 0.92 s, 0.85 s, 0.93 s, 0.90 s, 0.91 s (נניח שכתוצאה מעיון-העצר מופיעה מאית השנייה). האם ניתן להעריך מה היה הגודל הנמדד ללא ההפרעה האקראית? התשובה המתבקשת היא שקרוב לוודאי ללא מקור השגיאות האקראיות המדידה הייתה מניבה תוצאה קרובה לערך הממוצע (באנלוגיה לדוגמת הקליעה למטרה שהוצגה למעלה, ניתן לראות בשרטוט השמאלי כי מרכז המטרה נמצא באמת בין כל סמני הפגיעה). לפיכך, במקרה זה ניתן לומר כי זמן המחזור היה קרוב ל 0.897 s (הממוצע של ששת המדידות). היות ופיזור התוצאות הוא בטווח של מספר מאיות השנייה מערך ממוצע זה, מובן שאין משמעות רבה לספרה האחרונה וראוי לכתוב 0.90 s כתוצאת המדידה בניסוי זה.

בנקודה זו ראוי לציין כי בניסוי המטוטלת, ייתכן ועדיף היה לתת לה להתנדנד 6 תנודות ולמדוד את סך כל הזמן מאשר למדוד 6 פעמים את אורכה של תנועה בודדת. לכאורה, מדידה של משך 6 תנודות וחלוקת התוצאה ב 6 אמורה להיות זהה לממוצע של שש מדידות בודדות רצופות, אולם כדאי לזכור כי השגיאה נובעת בעיקר מתחילת ומסיום מדידה³.

חזרה על מדידה מספר פעמים תורמת גם לזהות (ולפסול) סטייה חריגה, חד פעמית. כך לדוגמא, בלוח המטרה שבשרטוט הבא, קל לזהות כי נקודת הפגיעה מצד שמאל למטה (בעיגול הירוק) נבעה מאיזו שהיא הפרעה חריגה, חד פעמית, לקלע:



נסכם:

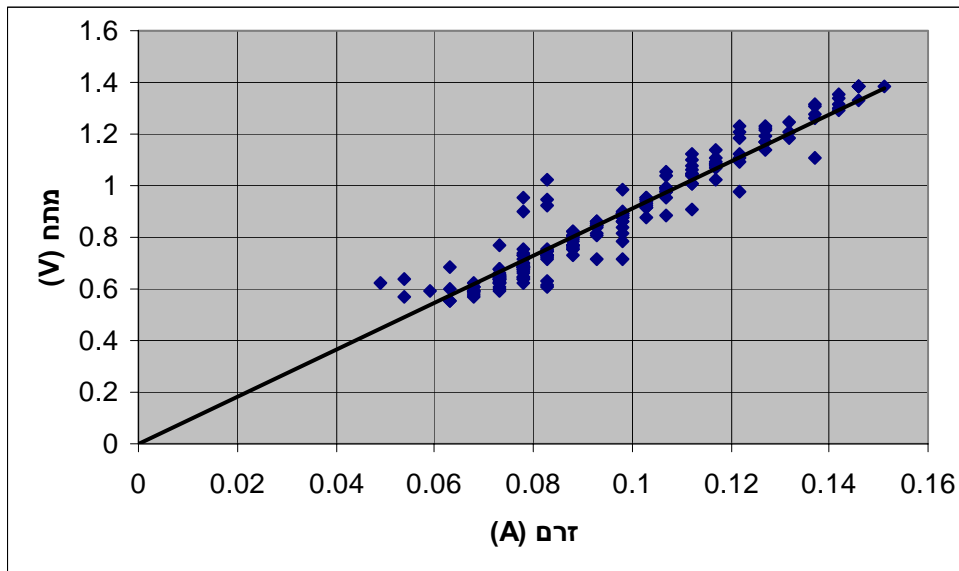
שגיאה שיטתית – שגיאה שיש בה חוקיות, הסטייה מהערך האמיתי היא תמיד לכיוון מסוים.

שגיאה אקראית – גודל השגיאה וכיוונה משתנים ממדידה למדידה. ניתנת לזיהוי על ידי מדידות חוזרות ונשנות אשר בהן מתקבלות בכל פעם תוצאות שונות. ניתן להקטין את השפעותיה על ידי מיצוע של מספר רב של מדידות חוזרות.

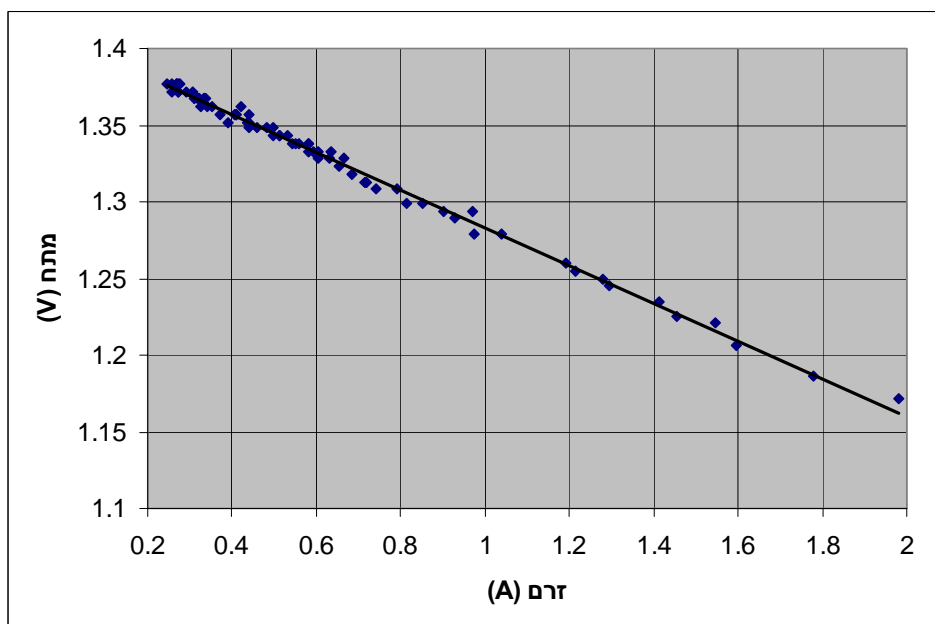
שאלה: בחלק גדול של הניסויים שתערוך השנה במעבדת הפיזיקה, תעשה שימוש במשקולות נתונות אשר מסותיהן 5gr, 10gr, 20gr, 50gr, 100gr. יצרן המשקולות מתחייב לדיוק של 1% במשקולות חדשות – הוא אינו יכול לדייק יותר בעת חיתוך פרוסות המתכת. בנוסף, עם השימוש נשחקות המשקולות מעט ומאבדות כ 0.1 גרם לאחר 5 שנות שימוש. עשה שימוש במונחים "שגיאה אקראית" ו"שגיאה שיטתית" לתיאור מקורות חוסר הדיוק בעת השימוש במשקולות אלו בניסוי.

³ למעשה במקרה זה חשוב גם לקחת בחשבון שתנודת המטוטלת הולכת ומתרכנת בגלל החיכוך עם האוויר ולפיכך היא לעולם לא ממש חוזרת על תנועתה. לפיכך אין טעם למדוד מספר גדול מאוד של תנודות, היות והתנודות האחרונות יהיו קטנות מאוד ביחס לתנודה הראשונה.

בגרף הבא ניתן לראות תוצאות של מדידה באמצעות מערכת ממוחשבת בה **השגיאה האקראית** בולטת. ניתן לראות כי נקודות המדידה מפוזרות מעל ומתחת לערכים הצפויים תיאורטית (הערכים הצפויים מתוארים על ידי הקו הרציף), בכל ערך של זרם (הציר האופקי) ניתן לראות מגוון קריאות שונות של ערכי המתח (הציר האנכי):



בגרף הבא, לעומת זאת, ניתן לראות כי פיזור הנקודות ביחס לצפוי תיאורטית (הקו הרציף), פיזור הנובע מגורמים אקראיים, קטן מאוד:



גם בגרף הבא אין פיזור משמעותי של הנקודות, ולפיכך ברור שלא היה גורם שגיאה אקראית משמעותי, אולם בבירור הנקודות רחוקות מהצפוי תיאורטית (הקו הישר). זהו לפיכך ניסוי בו השגיאה היא **שגיאה שיטתית**, החוקיות שנגלת בתוצאות המדידה שונה מהחוקיות שנצפתה על פי התיאוריה:

